

S. 52 / 1 Stundenlauf

Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm eines Läufers:

Geschwindigkeit v (in m/min)
in Abhängigkeit von der
Zeit t (in min)

Funktion:

$$v(t) = -\frac{1}{270}t^3 + \frac{1}{6}t^2 + 300$$

- a) Welche Strecke hat der Läufer nach einer halben Stunde zurückgelegt, welche Strecke nach einer Stunde?

Zunächst schätzen wir ab:

In den ersten 30 Minuten ist die Durchschnittsgeschwindigkeit des Läufers ungefähr 325 m/min.
Wenn er mit dieser Geschwindigkeit 30 Minuten lang läuft, legt er die folgende Strecke s zurück:

$$s = 30 \text{ min} \cdot 325 \text{ m/min} = 9750 \text{ m}$$

Exakte Berechnung der zurückgelegten Strecke:

... in den ersten 30 Minuten:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{30} v(t) dt = \int_0^{30} \left(-\frac{1}{270}t^3 + \frac{1}{6}t^2 + 300\right) dt \stackrel{\text{[Stammfunktion]}}{=} \left[-\frac{1}{270} \cdot \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}t^3 + 300t\right]_0^{30} = \\ &= \left[-\frac{1}{1080}t^4 + \frac{1}{18}t^3 + 300t\right]_0^{30} = -\frac{1}{1080} \cdot 30^4 + \frac{1}{18} \cdot 30^3 + 300 \cdot 30 - 0 = 9750 \text{ [m]} \end{aligned}$$

[Wow! Unsere Abschätzung war sogar exakt!]

... in den ersten 60 Minuten:

$$s = \int_0^{60} v(t) dt = \dots = -\frac{1}{1080} \cdot 60^4 + \frac{1}{18} \cdot 60^3 + 300 \cdot 60 - 0 = 18000 \text{ [m]}$$

- b) Berechnung der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}$ (lies: „v quer“):

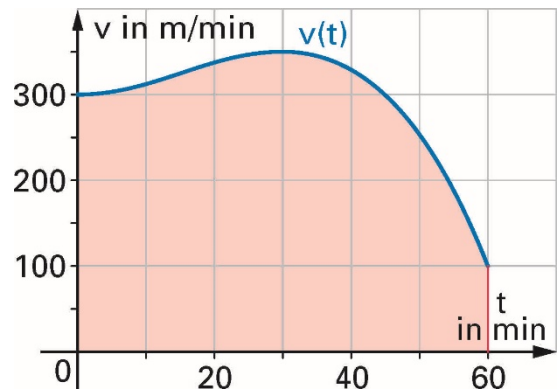
$$\bar{v} = \frac{\text{Gesamtstrecke}}{\text{Gesamtdauer}} = \frac{18000 \text{ m}}{60 \text{ min}} = 300 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

$$\text{in km/h: } \bar{v} = \frac{18000 \text{ m}}{60 \text{ min}} = \frac{18 \text{ km}}{1 \text{ h}} = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad [\text{Das ist ein ziemlich schneller Läufer!}]$$

Aus dem Diagramm können wir entnehmen:

In den ersten 45 Minuten war der Läufer schneller als seine Durchschnittsgeschwindigkeit.
(In diesem Zeitintervall ist $v > \bar{v} = 300 \text{ m/min}$.)

Für $45 \text{ min} < t < 60 \text{ min}$ war der Läufer langsamer als seine Durchschnittsgeschwindigkeit.
(In diesem Zeitintervall ist $v < \bar{v} = 300 \text{ m/min}$.)



S. 55 / 6 Schadstoffausstoß

Die Abbildung zeigt den momentanen Schadstoffausstoß einer Feuerungsanlage in Abhängigkeit von der Zeit seit Beginn der Feuerung.

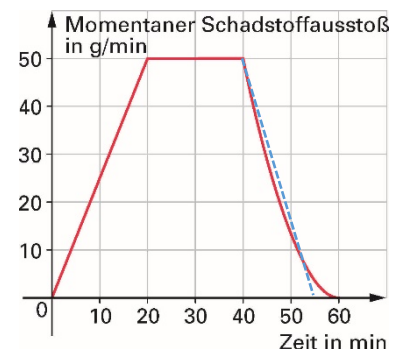
Wir betrachten zunächst die Achsenbeschriftungen:

Rechtswertachse: Zeit t in min

Hochwertachse: Momentaner Ausstoß in g/min

Interpretation:

Bei einem momentanen Ausstoß von 50 g/min
werden in einer Minute 50 g Schadstoff ausgestoßen.



Abschätzung der Gesamtmasse des ausgetretenen Schadstoffs während der 60-minütigen Betriebszeit:

In den ersten 20 Minuten steigt der momentane Schadstoffausstoß linear an von 0 g/min auf 50 g/min.
Der durchschnittliche momentane Schadstoffausstoß ist für $0 < t < 20$ damit 25 g/min.

Damit werden in den ersten 20 Minuten ausgestoßen: $m_1 = 20 \text{ min} \cdot 25 \text{ g/min} = 500 \text{ g}$

In $20 < t < 40$ werden ausgestoßen: $m_2 = (40 \text{ min} - 20 \text{ min}) \cdot 50 \text{ g/min} = 20 \text{ min} \cdot 50 \text{ g/min} = 1000 \text{ g}$

In $40 < t < 60$ nimmt der momentane Schadstoffausstoß ab, allerdings nicht linear. Die gestrichelte Linie im Diagramm verläuft so, dass das Flächenstück „zwischen Blau und Rot“ in $40 < t < 52$ denselben Inhalt hat wie das Flächenstück „zwischen Rot und Blau“ in $52 < t < 60$. Die gestrichelte Linie schneidet die t-Achse ungefähr bei $t = 54$. Damit: $m_3 = (54 \text{ min} - 40 \text{ min}) \cdot 25 \text{ g/min} = 14 \text{ min} \cdot 25 \text{ g/min} = 350 \text{ g}$

Gesamtmasse des ausgetretenen Schadstoffs: $m = m_1 + m_2 + m_3 = 1850 \text{ g}$