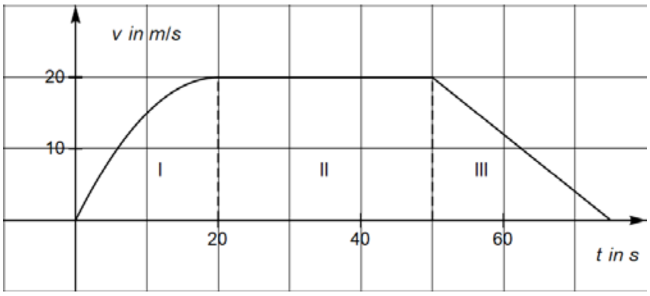
Q12-Mathe-Kurs (BAU) am 23.03.2020

Bitte selbstständig die HA-Lösung (S. 53 / 2) durcharbeiten und S. 55 / 7 bearbeiten!

S. 53 / 2 U-Bahn-Fahrt



a) I: Beschleunigung
II: Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit
III: Abbremsen

„Ruck" bei $t = 0$ (Anfahren)
$t = 50$ (Beginn des Abbremsens)
$t = 75$ (Ende des Abbremsens)

b) Scheitel: $S(20 \mid 20)$; weiterer Punkt: $P(0 \mid 0)$
beides einsetzen in die Scheitelform:

$y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \;\rightarrow\; 0 = a \cdot (0 - 20)^2 + 20$

$\rightarrow\; a = -\frac{20}{40} = -\frac{1}{20}$

Also: $\mathbf{v_I(t) = -\frac{1}{20} \cdot (t - 20)^2 + 20 = -\frac{1}{20}t^2 + 2t}$

Außerdem: $\mathbf{v_{II}(t) = 20}$ (konstante Geschw.)

c) Lineare Funktion, die Phase III beschreibt:
<u>zunächst</u> wie gewohnt mit x und y,
d. h. Ansatz: $y = mx + t$

Punkte $P(50 \mid 20)$ und $Q(75 \mid 0)$

Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 20}{75 - 50} = \frac{-20}{25} = -0{,}8$

Entwurf: $y = -0{,}8x + t$

P einsetzen: $20 = -0{,}8 \cdot 50 + t \;\rightarrow\; t = 60$

<u>nun:</u> Rechtswertachse („x-Achse") ist t-Achse,
Hochwertachse („y-Achse") ist v-Achse:

Also: $\mathbf{v_{III}(t) = -0{,}8 \cdot t + 60}$

d) Gesamte zurückgelegte Strecke (in m):

$$s = \underbrace{s_I}_{\text{„Integral"}} + \underbrace{s_{II}}_{\text{„Rechteck"}} + \underbrace{s_{III}}_{\text{„Dreieck"}} =$$

$$= \int_0^{20} v_I(t)\,dt + \underline{20 \cdot (50 - 20)} + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (75 - 50) =$$

$$= \left[-\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{3}t^3 + t^2\right]_0^{20} + \underline{600} + 250 =$$

$$= -\frac{400}{3} + 400 - 0 + \underline{600} + 250 =$$

$$= \frac{800}{3} + \underline{600} + 250 =$$

$$= 1116\tfrac{2}{3}\,[\text{m}] = 1116{,}666\ldots\,[\text{m}] \approx 1{,}1\,[\text{km}]$$

e) Mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$ *[lies: „v quer"]*:

$$\overline{v} = \frac{\text{Gesamtstrecke}}{\text{Gesamtdauer}} = \frac{1116\frac{2}{3}\,\text{m}}{75\,\text{s}} = 14\tfrac{8}{9}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 14{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

in km/h: $\overline{v} = 14\frac{8}{9} \cdot 3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 53{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

S. 55 / 7 Füllvorgang

Flüssigkeitsmenge zu Beginn ($t = 0$): 500 [ℓ]

Änderungsrate (also der Zufluss):

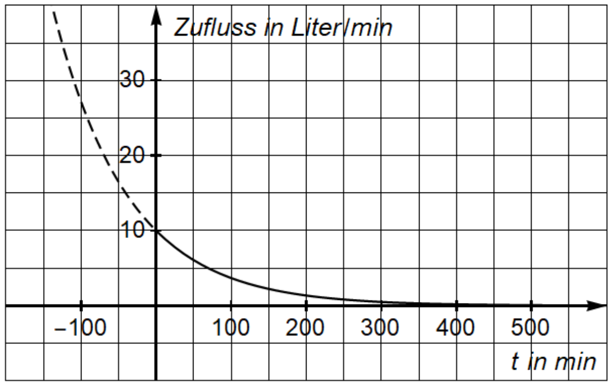
$f(t) = 10 \cdot e^{-0{,}01\,t}$ [in ℓ pro min; t: Zeit in min]

a) Graph der Funktion f im Vgl. zum Graph von e^x:

„−" im Argument, d. h. im Exponenten:
Spiegelung an der y-Achse

Faktor 0,01 im Argument:
Streckung um den Faktor 100 in x-Richtung
(sinnvoll: x- bzw. t-Achse: 1 cm ≙ 100)

Vor-Faktor 10:
Streckung um den Faktor 10 in y-Richtung
(sinnvoll: y-Achse: 1 cm ≙ 10)



Zu Beginn (ab $t = 0$) fließen ca. 10 ℓ/min zu, dann immer weniger, z. B. nach 100 Minuten nur noch ca. 4 ℓ/min. Nach 400 Minuten fließt kaum noch etwas zu.
Der Zufluss nimmt exponentiell ab.

b) Zufluss Z(60) in den ersten 60 Minuten:

$$Z(60) = \int_0^{60} f(t)\,dt = \left[10 \cdot (-100) \cdot e^{-0{,}01\,t}\right]_0^{60} =$$

$$= -1000 \cdot e^{-0{,}6} - (-1000 \cdot e^0) \approx 451{,}2\,[\ell]$$

Flüssigkeitsmenge im Behälter nach 60 Minuten:

$V = 500 + 451{,}2 = 951{,}2\,[\ell]$

c) Gleichung der Funktion g, die die im Behälter befindliche Flüssigkeitsmenge zum Zeitpunkt t beschreibt:

$$g(t) = 500 + \int_0^{t} f(x)\,dx =$$

[Integralfunktion mit Variabele t, deshalb Umbenennung der Variable der Integrandenfunktion: $t \rightarrow x$]

$$= 500 + \left[10 \cdot (-100) \cdot e^{-0{,}01\,x}\right]_0^{t} =$$

$$= 500 - 1000 \cdot e^{-0{,}01\,t} - (-\,1000\,e^0) =$$

$$= 1500 - 1000 \cdot e^{-0{,}01\,t}$$

d) Höchstmenge im Behälter: $0{,}8 \cdot 2000\,\ell = 1600\,\ell$
Wird die Höchstmenge jemals überschritten?

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(1500 - 1000 \cdot e^{-0{,}01\,t}\right) = 1500\,[\ell]$$

Die Höchstmenge wird nie erreicht.