

S. 110 / 11 Gesangsverein

50 Mitglieder: 30 weiblich, 20 männlich

Modell: Anwesenheit in der Probe $p = 80\% = 0,8$
(unabhängig voneinander → Bernoulli-Kette)

a) X: „Anzahl der anwesenden Chor-Mitglieder“

$$E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0,8 = 40$$

$$P_{0,8}^{50}(X = 40) \stackrel{TW}{=} 0,13982$$

$$P_{0,8}^{50}(X \geq 40) = 1 - P_{0,8}^{50}(X \leq 39) \stackrel{TW}{=} 1 - 0,41644 = 0,58356$$

b) Y: „Anzahl der Sängerinnen“

Wahrscheinlichkeit, dass 5 Sängerinnen fehlen:

$$P_{0,8}^{30}(Y = 25) = 0,17228$$

Z: „Anzahl der Sänger“

Wahrscheinlichkeit, dass 5 Sänger fehlen:

$$P_{0,8}^{20}(Z = 15) = 0,17456$$

Wahrscheinlichkeit, dass 5 Sängerinnen und 5 Sänger fehlen (unabhängig voneinander):

$$P_{0,8}^{30}(Y = 25) \cdot P_{0,8}^{20}(Z = 15) = 0,17228 \cdot 0,17456 = 0,03007...$$

c) Für die nächste Chorprobe haben sich 5 Mitglieder entschuldigt, es sind also nur noch 45 möglich:

Wahrscheinlichkeit, dass 5 weitere Mitgl. fehlen:

$$P_{0,8}^{45}(X = 40) = \binom{45}{40} \cdot 0,8^{40} \cdot 0,2^5 = 0,05196...$$

d) Wahrscheinlichkeit f. Anwesenheit aller 5 Tenöre:

$$P = 0,8^5 = 0,32768 = p \text{ (Trefferw. für 3-m-Aufgabe)}$$

Wie viele Chorproben müssen mind. stattfinden, damit mit einer W. von mehr als 99 % mindestens einmal alle 5 Tenöre gemeinsam anwesend sind?

3-m-Aufgabe: $p = 0,32768 \rightarrow q = 0,67232$
geforderte Wahrsch. $P > 0,99$; n gesucht

$$P_{0,32768}^n(X \geq 1) \stackrel{!}{>} 0,99$$

$$1 - P_{0,32768}^n(X = 0) > 0,99$$

$$0,01 > P_{0,32768}^n(X = 0)$$

$$P_{0,32768}^n(X = 0) < 0,01$$

$$\binom{n}{0} \cdot 0,32768^0 \cdot 0,67232^n < 0,01 \quad [q^n < 1 - P]$$

$$1 \cdot 1 \cdot 0,67232^n < 0,01$$

$$\ln(0,67232^n) < \ln(0,01)$$

$$n \cdot \ln(0,67232) < \ln(0,01)$$

$$n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,67232)} = 11,599...$$

Es müssen mindestens 12 Proben stattfinden.

e) Die Chormitglieder kommen vermutlich nicht alle unabhängig voneinander zur Probe, z. B. wegen Fahrgemeinschaften oder bei (Ehe-)Paaren. Außerdem ist die Anwesenheitsquote vermutlich nicht bei allen gleich, z. B. wegen gesundheitlicher Probleme oder wegen beruflicher Belastungen. Ferner wird die Quote im Jahresablauf nicht immer gleich hoch sein, z. B. wegen Urlaubzeiten usw.

S. 111 / 13 Ziehen mit und ohne Zurückkl.

Urne: schwarze Kugeln (Treffer): $p = 40\% = 0,4$
weiße Kugeln (Nieten): $q = 60\% = 0,6$

Ziehung von 3 Kugeln ($n = 3$)

a) Wahrscheinlichkeit für genau 3 Treffer

Urne: N = 10 Kugeln (4 schw., 6 weiße)

Ziehen mit Zurücklegen:

(Wahrscheinlichkeit für „Treffer“ ändert sich nicht! → Bernoulli-Kette, Binomialverteilung)

$$P_{0,4}^3(X = 3) = 0,4^3 = \mathbf{0,064}$$

Ziehen ohne Zurücklegen:

(→ Hypergeometrische Verteilung)

$$P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 \cdot 1}{120} = \mathbf{0,03333...}$$

Vergleich: Die Wahrscheinlichkeit ist beim Z. m. Z. deutlich größer als beim Z. o. Z.

b) **Urne: N = 100 Kugeln** (40 schw., 60 weiße)

Ziehen mit Zurücklegen:

(Wahrscheinlichkeit für „Treffer“ ändert sich nicht! → Bernoulli-Kette, Binomialverteilung)

$$P_{0,4}^3(X = 3) = 0,4^3 = \mathbf{0,064}$$

Ziehen ohne Zurücklegen:

(→ Hypergeometrische Verteilung)

$$P(X = 3) = \frac{\binom{40}{3} \cdot \binom{60}{0}}{\binom{100}{3}} = \frac{9880 \cdot 1}{161700} = \mathbf{0,06110...}$$

Urne: N = 1000 Kugeln (400 schw., 600 weiße)

Ziehen mit Zurücklegen:

(Wahrscheinlichkeit für „Treffer“ ändert sich nicht! → Bernoulli-Kette, Binomialverteilung)

$$P_{0,4}^3(X = 3) = 0,4^3 = \mathbf{0,064}$$

Ziehen ohne Zurücklegen:

(→ Hypergeometrische Verteilung)

$$P(X = 3) = \frac{\binom{400}{3} \cdot \binom{600}{0}}{\binom{1000}{3}} = ... = \mathbf{0,06371...}$$

Man sieht:

Mit wachsender Anzahl N der Kugeln in der Urne nähert sich die Wahrscheinlichkeit beim Ziehen ohne Zurücklegen immer mehr an die Wahrscheinlichkeit beim Ziehen mit Zurücklegen an.

Vgl. Buch S. 107:

Wenn aus einer großen Gesamtheit wenige Elemente rein zufällig herausgegriffen werden, darf man die interessierenden Wahrscheinlichkeiten näherungsweise mit der Bernoulli-Formel (d. h. mit der Binomialverteilung) berechnen.