S. 119 / 5 Qualitätskontrolle

Ein Großhändler hat im Hinblick auf den bevorstehenden Jahreswechsel Knallkörper bei einem neuen Lieferanten eingekauft. Dieser verspricht ihm, dass die Lieferung weniger als 15 % Ausschuss enthält.

a) *Der Großhändler ist bereit, die Behauptung des Lieferanten zu akzeptieren, wenn von 30 Knallkörpern höchstens 5 unbrauchbar sind.*

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Behauptung des Lieferanten akzeptiert, obwohl die Lieferung in Wirklichkeit 20 % Ausschuss enthält?

Tatsächlich: $p = 0{,}2$ (p: Ausschuss-Anteil)

Stichprobe der Länge $n = 30$

X: „Anzahl der unbrauchbaren Knallkörper"

Akzeptanz der Behauptung d. Lieferanten: $X \le 5$

$P_{0,2}^{30}(X \le 5) \overset{TW}{=} 0{,}42751 \approx 42{,}8\ \%$

[Das ist ziemlich schlecht für den Großhändler, denn mit einer Wahrscheinlichkeit von 42,8 % hält er eine ziemlich schlechte Lieferung („Unbrauchbar-Anteil" p = 0,2) für gut.]

b) *Die Hullhypothese H_0: $p \ge 0{,}15$ („viele schlecht") soll auf dem Signifikanzniveau von 5 % bei einem Stichprobenumfang von 30 getestet werden. Bestimme die zughörige Entscheidungsregel.*

H_0: $p \ge 0{,}15$ („viele schlecht")

Entscheidungsregel:

$$\underbrace{0 \quad \dots \quad k}_{\text{Ablehnungsbereich } \bar{A}} \qquad \underbrace{k+1 \quad \dots \quad 30}_{\text{Annahmebereich } A}$$

(„wenige schlecht") („viele schlecht")

Annahmebereich: $A = \{k + 1; k + 2; ...; 30\}$

$X \in A \rightarrow$ Annahme von H_0 („viele schlecht")

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{0; 1; ...; k\}$

$X \in \bar{A} \rightarrow$ Ablehnung von H_0 (d. h. „gute Lief.")

Fehler 1. Art: H_0 trifft zu, wird fälschlich abgelehnt: Die Lieferung ist schlecht, wird aufgrund des Testergebnisses aber fälschlich für gut befunden.

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art soll höchstens 5 % (Signifikanzniveau) groß sein.

Also: $P_{0,15}^{30}(X \in \bar{A}) \overset{!}{\le} 0{,}05$

$P_{0,15}^{30}(X \le k) \le 0{,}05$

Tafelwerk (p = 0,15; n = 30):
Gesucht ist der größtmögliche Wert k, für den die Summenwahrscheinlichkeit höchstens 0,05 ist:

$P_{0,15}^{30}(X \le 1) = 0{,}04803$ und zum Vergleich:

$P_{0,15}^{30}(X \le 2) = 0{,}15140$ („zu viel")

Also: $k = 1$

Entscheidungsregel:

Bei keinem oder einem unbrauchbaren Knallkörper wird die Lieferung für gut befunden.
(Ablehung von H_0 für $X \in \bar{A} = \{0; 1\}$)

Bei zwei und mehr unbrauchbaren Knallkörpern wird die Lieferung für schlecht befunden.
(Annahme von H_0 für $X \in A = \{2; 3; ...; 30\}$)

[Diese Entscheidungsregel ist gut für den Großhändler, denn er wird nur mit ca. 4,8 % Wahrscheinlichkeit eine schlechte Lieferung für gut halten.]

ERGÄNZUNG: Problem für den Lieferanten:
Wahrscheinlichkeit, mit der eine ziemlich gute Lieferung (p = 0,1) für schlecht befunden wird:

$P_{0,1}^{30}(X \ge 2) = 1 - P_{0,1}^{30}(X \le 1) \overset{TW}{=} 1 - 0{,}18370 \approx 81{,}6\ \%$

S. 119 / 6 Ausbau der Stadtautobahn

Behauptung eines Abgeordneten:

Mindestens 80 % der Einwohner sind für den Ausbau.

a) Test dieser Behauptung durch eine Befragung von 100 zufällig ausgewählten Autofahrern (!)
(an einer Autobahnraststätte (!!!)).

Gesucht:
Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich, wenn die Behauptung des Abgeordneten mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10 % irrtümlich abgelehnt werden soll.

Nullhypothese: H_0: $p \ge 0{,}8$ („viele Befürworter")

Test: $n = 100$

X: „Anzahl der Ausbau-Befürworter"

Entscheidungsregel:

$$\underbrace{0 \quad \dots \quad k}_{\text{Ablehnungsbereich } \bar{A}} \qquad \underbrace{k+1 \quad \dots \quad 100}_{\text{Annahmebereich } A}$$

(„wenige Befürworter") („viele Befürworter")

Annahmebereich: $A = \{k + 1; k + 2; ...; 100\}$

$X \in A \rightarrow$ Annahme von H_0 („viele Befürw.")

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{0; 1; ...; k\}$

$X \in \bar{A} \rightarrow$ Ablehnung von H_0 („wenige Bef.")

Fehler (1. Art):
H_0 trifft zu, wird aber fälschlich abgelehnt:
Es sind mind. 80 % Befürworter, aufgrund des Testergebnisses geht man aber von weniger als 80 % Befürwortern aus.

Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler (1. Art) soll höchstens 10 % (Signifikanzniveau) groß sein.

Also: $P_{0,8}^{100}(X \in \bar{A}) \overset{!}{\le} 0{,}1$ (= 10 %)

$P_{0,8}^{100}(X \le k) \le 0{,}1$

Tafelwerk (p = 0,8; n = 100):
Gesucht ist der größtmögliche Wert k, für den die Summenwahrscheinlichkeit höchstens 0,1 ist:

$P_{0,8}^{100}(X \le 74) = 0{,}08748$ und zum Vergleich:

$P_{0,8}^{100}(X \le 75) = 0{,}13135$ („zu viel")

Also: $k = 74$

Entscheidungsregel:

Bei bis zu 74 Befürwortern geht man von weniger als 80 % Befürwortern aus.
(Ablehung von H_0 für $X \in \bar{A} = \{0; 1; ...; 74\}$)

Bei 75 und mehr Befürwortern geht man von mindestens 80 % Befürwortern aus und hält somit die Behauptung des Abgeordneten für wahr.
(Annahme von H_0 für $X \in A = \{75; 76; ...; 100\}$)

b) Der in Teilaufgabe a) durchgeführte Test eignet sich nicht, die Behauptung des Abgeordneten zu überprüfen, dass mindestens 80 % der Einwohner den Ausbau befürworten. Befragt werden bei diesem Test (an einer Autobahnraststätte) ja nur Autofahrer, die zudem noch die Autobahn nutzen. Es ist anzunehmen, dass der Anteil p der Ausbau-Befürworter unter den Autofahrern deutlich größer ist als unter allen Einwohnern.