

S. 119 / 5 Qualitätskontrolle

Ein Großhändler hat im Hinblick auf den bevorstehenden Jahreswechsel Knallkörper bei einem neuen Lieferanten eingekauft. Dieser verspricht ihm, dass die Lieferung weniger als 15 % Ausschuss enthält.

- a) Der Großhändler ist bereit, die Behauptung des Lieferanten zu akzeptieren, wenn von 30 Knallkörpern höchstens 5 unbrauchbar sind.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Behauptung des Lieferanten akzeptiert, obwohl die Lieferung in Wirklichkeit 20 % Ausschuss enthält?

Tatsächlich: $p = 0,2$ (p : Ausschuss-Anteil)

Stichprobe der Länge $n = 30$

X : „Anzahl der unbrauchbaren Knallkörper“

Akzeptanz der Behauptung d. Lieferanten: $X \leq 5$

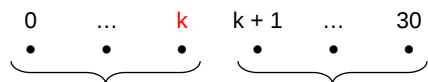
$$P_{0,2}^{30}(X \leq 5) \stackrel{TW}{=} 0,42751 \approx 42,8 \%$$

[Das ist ziemlich schlecht für den Großhändler, denn mit einer Wahrscheinlichkeit von 42,8 % hält er eine ziemlich schlechte Lieferung („Unbrauchbar-Anteil“ $p = 0,2$) für gut.]

- b) Die Nullhypothese $H_0: p \geq 0,15$ („viele schlecht“) soll auf dem Signifikanzniveau von 5 % bei einem Stichprobenumfang von 30 getestet werden. Bestimme die zugehörige Entscheidungsregel.

$H_0: p \geq 0,15$ („viele schlecht“)

Entscheidungsregel:



Ablehnungsbereich $\bar{A}$ („wenige schlecht“)

Annahmebereich A („viele schlecht“)

Annahmebereich: $A = \{k + 1; k + 2; \dots; 30\}$

$X \in A \rightarrow$ Annahme von H_0 („viele schlecht“)

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{0; 1; \dots; k\}$

$X \in \bar{A} \rightarrow$ Ablehnung von H_0 (d. h. „gute Lief.“)

Fehler 1. Art: H_0 trifft zu, wird fälschlich abgelehnt:
Die Lieferung ist schlecht, wird aufgrund des Testergebnisses aber fälschlich für gut befunden.

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art soll höchstens 5 % (Signifikanzniveau) groß sein.

Also: $P_{0,15}^{30}(X \in \bar{A}) \stackrel{!}{\leq} 0,05$

$$P_{0,15}^{30}(X \leq k) \leq 0,05$$

Tafelwerk ($p = 0,15$; $n = 30$):

Gesucht ist der größtmögliche Wert k , für den die Summenwahrscheinlichkeit höchstens 0,05 ist:

$$P_{0,15}^{30}(X \leq 1) = 0,04803 \quad \text{und zum Vergleich:}$$

$$P_{0,15}^{30}(X \leq 2) = 0,15140 \quad (\text{„zu viel“})$$

Also: $k = 1$

Entscheidungsregel:

Bei keinem oder einem unbrauchbaren Knallkörper wird die Lieferung für gut befunden.

(Ablehnung von H_0 für $X \in \bar{A} = \{0; 1\}$)

Bei zwei und mehr unbrauchbaren Knallkörpern wird die Lieferung für schlecht befunden.

(Annahme von H_0 für $X \in A = \{2; 3; \dots; 30\}$)

[Diese Entscheidungsregel ist gut für den Großhändler, denn er wird nur mit ca. 4,8 % Wahrscheinlichkeit eine schlechte Lieferung für gut halten.]

ERGÄNZUNG: Problem für den Lieferanten:
Wahrscheinlichkeit, mit der eine ziemlich gute Lieferung ($p = 0,1$) für schlecht befunden wird:

$$P_{0,1}^{30}(X \geq 2) = 1 - P_{0,1}^{30}(X \leq 1) \stackrel{TW}{=} 1 - 0,18370 \approx 81,6 \%$$

S. 119 / 6 Ausbau der Stadtautobahn

Behauptung eines Abgeordneten:

Mindestens 80 % der Einwohner sind für den Ausbau.

- a) Test dieser Behauptung durch eine Befragung von 100 zufällig ausgewählten Autofahrern (!) (an einer Autobahnraststätte (!!!)).

Gesucht:

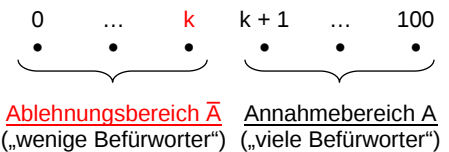
Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich, wenn die Behauptung des Abgeordneten mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10 % irrtümlich abgelehnt werden soll.

Nullhypothese: $H_0: p \geq 0,8$ („viele Befürworter“)

Test: $n = 100$

X : „Anzahl der Ausbau-Befürworter“

Entscheidungsregel:



Ablehnungsbereich $\bar{A}$ („wenige Befürworter“)

Annahmebereich A („viele Befürworter“)

Annahmebereich: $A = \{k + 1; k + 2; \dots; 100\}$

$X \in A \rightarrow$ Annahme von H_0 („viele Befürw.“)

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{0; 1; \dots; k\}$

$X \in \bar{A} \rightarrow$ Ablehnung von H_0 („wenige Bef.“)

Fehler (1. Art):

H_0 trifft zu, wird aber fälschlich abgelehnt:

Es sind mind. 80 % Befürworter, aufgrund des Testergebnisses geht man aber von weniger als 80 % Befürwortern aus.

Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler (1. Art) soll höchstens 10 % (Signifikanzniveau) groß sein.

Also: $P_{0,8}^{100}(X \in \bar{A}) \stackrel{!}{\leq} 0,1 \quad (= 10 \%)$

$$P_{0,8}^{100}(X \leq k) \leq 0,1$$

Tafelwerk ($p = 0,8$; $n = 100$):

Gesucht ist der größtmögliche Wert k , für den die Summenwahrscheinlichkeit höchstens 0,1 ist:

$$P_{0,8}^{100}(X \leq 74) = 0,08748 \quad \text{und zum Vergleich:}$$

$$P_{0,8}^{100}(X \leq 75) = 0,13135 \quad (\text{„zu viel“})$$

Also: $k = 74$

Entscheidungsregel:

Bei bis zu 74 Befürwortern geht man von weniger als 80 % Befürwortern aus.

(Ablehnung von H_0 für $X \in \bar{A} = \{0; 1; \dots; 74\}$)

Bei 75 und mehr Befürwortern geht man von mindestens 80 % Befürwortern aus und hält somit die Behauptung des Abgeordneten für wahr.

(Annahme von H_0 für $X \in A = \{75; 76; \dots; 100\}$)

- b) Der in Teilaufgabe a) durchgeführte Test eignet sich nicht, die Behauptung des Abgeordneten zu überprüfen, dass mindestens 80 % der Einwohner den Ausbau befürworten. Befragt werden bei diesem Test (an einer Autobahnraststätte) ja nur Autofahrer, die zudem noch die Autobahn nutzen. Es ist anzunehmen, dass der Anteil p der Ausbau-Befürworter unter den Autofahrern deutlich größer ist als unter allen Einwohnern.