

S. 120 / 7 Seeufer

Vermutung des Campingplatz-Betreibers:
Mindestens 75 % der Gäste wollen einen Sandstrand.
Kann diese Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau von 5 % abgelehnt werden, wenn bei einer Befragung von 200 zufällig ausgewählten Campern nur 109 einen Sandstrand bevorzugen? (Begründung!)

Nullhypothese: $H_0: p \geq 0,75$ („viele ‚Sandis““)

Test: $n = 200$

X : „Anzahl der Sandstrand-Befürworter“

1. Weg (einfacher):

Entscheidungsregel (*annehmen*):

Annahmebereich: $A = \{110; 111; \dots; 200\}$

$X \in A \rightarrow$ Annahme von H_0 („viele ‚Sandis““)

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{0; 1; \dots; 109\}$

$X \in \bar{A} \rightarrow$ Ablehnung von H_0 („wenige ‚S.““)

Fehler 1. Art:

H_0 trifft zu, wird aber fälschlich abgelehnt:

Es sind mind. 75 % Sandstrand-Befürworter, aufgrund des Testergebnisses geht man aber von weniger als 75 % Befürwortern aus.

Ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art bei obiger Entscheidungsregel kleiner als das Signifikanzniveau von 5 %?

$$P_{0,75}^{200}(X \in \bar{A}) = P_{0,75}^{200}(X \leq 109) \stackrel{TW}{=} 0 \quad (\text{nicht tabelliert})$$

Bei obiger Entscheidungsregel, H_0 bei bis zu 109 Sandstrand-Befürwortern zu verwerfen, ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art nahezu 0. Bei einem Testergebnis von nur 109 Befürwortern kann H_0 somit auf einem Signifikanzniveau von 5 % abgelehnt werden.

2. Weg (etwas schwieriger):

Gesucht:

Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich, so dass H_0 mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % irrtümlich abgelehnt wird.

Entscheidungsregel (*bestimmen*):

Annahmebereich: $A = \{k + 1; k + 2; \dots; 200\}$

$X \in A \rightarrow$ Annahme von H_0 („viele ‚Sandis““)

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{0; 1; \dots; k\}$

$X \in \bar{A} \rightarrow$ Ablehnung von H_0 („wenige ‚S.““)

Fehler 1. Art: ... (siehe oben)

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art soll höchstens 5 % (Signifikanzniveau) groß sein.

$$\text{Also: } P_{0,75}^{200}(X \in \bar{A}) \stackrel{!}{\leq} 0,05 \quad (= 5 \%)$$

$$P_{0,75}^{200}(X \leq k) \leq 0,05$$

Tafelwerk ($p = 0,75; n = 200$):

Gesucht ist der größtmögliche Wert k , für den die Summenwahrscheinlichkeit höchstens 5 % ist:

$$P_{0,75}^{200}(X \leq 139) = 0,04539$$

$$P_{0,75}^{200}(X \leq 140) = 0,06247 \quad (\text{„zu viel“})$$

Also: $k = 139$

Entscheidungsregel:

Bei bis zu 139 Sandstrand-Befürwortern (u. somit auch bei 109) kann H_0 auf dem Signifikanzniveau von 5 % verworfen werden.

S. 120 / 9 Bauteile

X : Obergrenze der Abweichung vom Sollwert (in mm)

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0,50	0,19	0,16	0,12	0,03

a) Bauteile mit Abweichungen von mehr als σ vom Erwartungswert $\mu = E(X)$ gelten als Ausschuss.

Zu zeigen: Die Ausschussquote ist 15 %.

Erwartungswert:

$$\mu = E(X) = 0 \cdot 0,50 + 1 \cdot 0,19 + \dots + 4 \cdot 0,03 = 0,99$$

Varianz:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= (0 - 0,99)^2 \cdot 0,50 + (1 - 0,99)^2 \cdot 0,19 + \dots \\ &\quad + (4 - 0,99)^2 \cdot 0,03 = 1,4099 \approx 1,41 \end{aligned}$$

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{1,4099} = 1,1873 \dots \approx 1,19$$

Abweichung von mehr als σ vom Erwartungswert:

$$\text{also: } x > \mu + \sigma = 0,99 + 1,19 = 2,18$$

erfüllt für $x = 3$ und für $x = 4$

$$P(x > \mu + \sigma) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0,12 + 0,03 = 0,15 = 15 \%$$

Also: Die Ausschussquote ist 15 %.

b) Konkurrenz-Firma behauptet, ihre Ausschussquote p ist höchstens 10 %.

Nullhypothese: $H_0: p \leq 0,10$ („wenig Aussch.“)

Test: $n = 200$

Y : „Anzahl der Ausschuss-Teile“

Entscheidungsregel für Signifikanzniveau 5 %:

Annahmebereich: $A = \{0; 1; \dots; k\}$

$Y \in A \rightarrow$ Annahme von H_0 („wenig Aussch.“)

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{k + 1; k + 2; \dots; 200\}$

$Y \in \bar{A} \rightarrow$ Ablehnung von H_0 („viel Aussch.“)

Fehler 1. Art:

H_0 trifft zu, wird aber fälschlich abgelehnt:

Es ist höchstens 10 % Ausschuss, aufgrund des Testergebnisses geht man aber von mehr als 10 % Ausschuss aus.

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art soll höchstens 5 % (Signifikanzniveau) groß sein.

$$\text{Also: } P_{0,1}^{200}(Y \in \bar{A}) \stackrel{!}{\leq} 0,05 \quad (= 5 \%)$$

$$P_{0,1}^{200}(Y \geq k + 1) \leq 0,05$$

$$1 - P_{0,1}^{200}(Y \leq k) \leq 0,05$$

$$P_{0,1}^{200}(Y \leq k) \geq 0,95$$

Tafelwerk ($p = 0,1; n = 200$):

Gesucht ist der kleinstmögliche Wert k , für den die Summenwahrscheinlichkeit mindestens 95 % ist:

$$P_{0,1}^{200}(Y \leq 27) = 0,95657$$

$$P_{0,1}^{200}(Y \leq 26) = 0,93278 \quad (\text{„zu wenig“})$$

Also: $k = 27$

Bei 28 und mehr defekten Ausschuss-Teilen kann H_0 auf dem Signifikanzniveau abgelehnt werden.

c) Testergebnis: 27 Ausschuss-Teile

Interpretation: Man kann der Behauptung der Konkurrenz-Firma (gerade noch) glauben schenken.

d) In Wirklichkeit: $p = 0,15$ (wie bei erster Firma)

$$\text{Fehler 2. Art: } P_{0,15}^{200}(Y \leq 27) = 0,31659 \approx 31,7 \%$$