

S. 165 / 2 Flugsicherung

Radarstation im Ursprung $O(0 | 0 | 0)$

x_1 -Achse: Osten ; x_2 -Achse: Norden

Längeneinheit: 1 LE = 1km

	Airbus (Passagierfl.)	Antonov (Frachtfl.)
12.00 Uhr:	$A(-3 0 10)$	$P(10 9 9)$
12.01 Uhr:	$B(6 12 10)$	$Q(17,5 19 9)$

Bewegung beider Flugzeuge längs einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit

a) t : Zeit in Minuten seit 12.00 Uhr

Geradengleichungen für die Flugbahnen:

$$\text{Airbus: } \mathbf{r}_P = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_P = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Antonov: } \mathbf{r}_F = \mathbf{PQ} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_F = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7,5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Verlauf der Flugbahnen im Koordinatensystem:

Die Flugbahnen von Airbus (P) und Antonov (F) verlaufen in einer konstanten Flughöhe über dem Meeresspiegel (3. Koordinate von $\mathbf{r}_P$ und $\mathbf{r}_F = 0$). Der Airbus fliegt in 10 km Höhe, die Antonov in 9 km Höhe. Da $\mathbf{r}_P = 1,2 \cdot \mathbf{r}_F$, sind die Flugbahnen parallel, beide fliegen in dieselbe Richtung.

c) Entfernung der Flugzeuge zur Zeit $t = 0$:

$$d(t=0) = |\mathbf{AP}| = \sqrt{13^2 + 9^2 + 1^2} \approx 15,8 \text{ [km]}$$

Zeitpunkt $t_{\min}$ und Wert $d_{\min}$ der geringsten Entfernung:

Entfernung der Flugzeuge in Abhängigkeit von t :

$$\begin{aligned} d(t) &= |\mathbf{X}_F \mathbf{X}_P| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7,5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right| = \\ &= \left| \begin{pmatrix} -13 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \\ &= \sqrt{(-13 + 1,5t)^2 + (-9 + 2t)^2 + 1^2} = \\ &= \sqrt{169 - 39t + 2,25t^2 + 81 - 36t + 4t^2 + 1} = \\ &= \sqrt{6,25t^2 - 75t + 251} \end{aligned}$$

$d(t)$ ist minimal, wenn der Radikand $r(t)$ minimal ist:

$$r'(t) = 12,5t - 75 \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow t_{\min} = 6 \text{ [min]}$$

(Es ist eine Minimalstelle, da der Graph von $r(t)$ eine nach oben geöffnete Parabel ist.)

$$d_{\min} = d(t_{\min}) = \sqrt{6,25 \cdot 6^2 - 75 \cdot 6 + 251} \approx 5,1 \text{ [km]}$$

d) Erfassungsradius der Radarstation: $R = 150 \text{ [km]}$

Zeiten t_{Ein} / t_{Aus} für das Ein- / Austreten des Airbus in den von der Radarstation erfassten Bereich:

Erf. Bereich: Kugel um $O(0 | 0 | 0)$ mit $R = 150$

$$(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2 + (x_3 - 0)^2 = 150^2$$

Schnitt der Airbus-Flugbahn mit der Kugel:

$\mathbf{X}_P$ koordinatenweise in Kugelgleichung einsetzen:

$$(-3 + 9t)^2 + (12t)^2 + 10^2 = 150^2;$$

$$9 - 54t + 81t^2 + 144t^2 + 100 = 22500;$$

$$225t^2 - 54t - 22391 = 0;$$

$$t_{\text{Ein,Aus}} = \frac{1}{450} (54 \pm \sqrt{54^2 - 4 \cdot 225 \cdot (-22391)})$$

$$t_{\text{Ein}} = \frac{1}{450} (54 - \sqrt{20151954}) \approx -9,9 \rightarrow \text{ca. 11.50 Uhr}$$

$$t_{\text{Aus}} = \frac{1}{450} (54 + \sqrt{20151954}) \approx 10,1 \rightarrow \text{ca. 12.10 Uhr}$$

S. 165 / 2 Flugsicherung

Radarstation im Ursprung $O(0 | 0 | 0)$

x_1 -Achse: Osten ; x_2 -Achse: Norden

Längeneinheit: 1 LE = 1km

	Airbus (Passagierfl.)	Antonov (Frachtfl.)
12.00 Uhr:	$A(-3 0 10)$	$P(10 9 9)$
12.01 Uhr:	$B(6 12 10)$	$Q(17,5 19 9)$

Bewegung beider Flugzeuge längs einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit

a) t : Zeit in Minuten seit 12.00 Uhr

Geradengleichungen für die Flugbahnen:

$$\text{Airbus: } \mathbf{r}_P = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_P = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Antonov: } \mathbf{r}_F = \mathbf{PQ} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_F = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7,5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Verlauf der Flugbahnen im Koordinatensystem:

Die Flugbahnen von Airbus (P) und Antonov (F) verlaufen in einer konstanten Flughöhe über dem Meeresspiegel (3. Koordinate von $\mathbf{r}_P$ und $\mathbf{r}_F = 0$). Der Airbus fliegt in 10 km Höhe, die Antonov in 9 km Höhe. Da $\mathbf{r}_P = 1,2 \cdot \mathbf{r}_F$, sind die Flugbahnen parallel, beide fliegen in dieselbe Richtung.

c) Entfernung der Flugzeuge zur Zeit $t = 0$:

$$d(t=0) = |\mathbf{AP}| = \sqrt{13^2 + 9^2 + 1^2} \approx 15,8 \text{ [km]}$$

Zeitpunkt $t_{\min}$ und Wert $d_{\min}$ der geringsten Entfernung:

Entfernung der Flugzeuge in Abhängigkeit von t :

$$\begin{aligned} d(t) &= |\mathbf{X}_F \mathbf{X}_P| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7,5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right| = \\ &= \left| \begin{pmatrix} -13 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \\ &= \sqrt{(-13 + 1,5t)^2 + (-9 + 2t)^2 + 1^2} = \\ &= \sqrt{169 - 39t + 2,25t^2 + 81 - 36t + 4t^2 + 1} = \\ &= \sqrt{6,25t^2 - 75t + 251} \end{aligned}$$

$d(t)$ ist minimal, wenn der Radikand $r(t)$ minimal ist:

$$r'(t) = 12,5t - 75 \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow t_{\min} = 6 \text{ [min]}$$

(Es ist eine Minimalstelle, da der Graph von $r(t)$ eine nach oben geöffnete Parabel ist.)

$$d_{\min} = d(t_{\min}) = \sqrt{6,25 \cdot 6^2 - 75 \cdot 6 + 251} \approx 5,1 \text{ [km]}$$

d) Erfassungsradius der Radarstation: $R = 150 \text{ [km]}$

Zeiten t_{Ein} / t_{Aus} für das Ein- / Austreten des Airbus in den von der Radarstation erfassten Bereich:

Erf. Bereich: Kugel um $O(0 | 0 | 0)$ mit $R = 150$

$$(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2 + (x_3 - 0)^2 = 150^2$$

Schnitt der Airbus-Flugbahn mit der Kugel:

$\mathbf{X}_P$ koordinatenweise in Kugelgleichung einsetzen:

$$(-3 + 9t)^2 + (12t)^2 + 10^2 = 150^2;$$

$$9 - 54t + 81t^2 + 144t^2 + 100 = 22500;$$

$$225t^2 - 54t - 22391 = 0;$$

$$t_{\text{Ein,Aus}} = \frac{1}{450} (54 \pm \sqrt{54^2 - 4 \cdot 225 \cdot (-22391)})$$

$$t_{\text{Ein}} = \frac{1}{450} (54 - \sqrt{20151954}) \approx -9,9 \rightarrow \text{ca. 11.50 Uhr}$$

$$t_{\text{Aus}} = \frac{1}{450} (54 + \sqrt{20151954}) \approx 10,1 \rightarrow \text{ca. 12.10 Uhr}$$