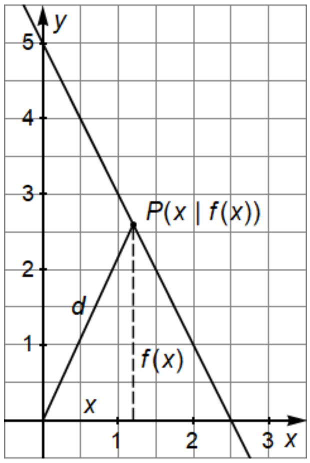
Extremwertprobleme

23.03.2020

1. Bsp.: S. 60 / 1 a) Kleinste Entfernung



Gerade: $y = -2x + 5 = f(x)$

Welcher Punkt P auf der Geraden hat vom Ursprung minimalen Abstand?

① *Aufstellen der Funktion (bzw. des Funktionsterms) für die Größe, die maximal oder minimal sein soll:*

Abstand d eines beliebigen Punktes $P(x \mid f(x))$ vom Ursprung:

Pythagoras: $d^2 = x^2 + (f(x))^2 =$

$= x^2 + (-2x + 5)^2 =$

$= x^2 + 4x^2 - 20x + 25 =$

$= 5x^2 - 20x + 25$

Also: Abstand $d(x)$ in Abh. von der x-Koordinate des Punktes P:

$d(x) = \sqrt{5x^2 - 20x + 25}$

② *Bestimmen der Maximalstelle bzw. Minimalstelle:*

Wir betrachten den Radikanden $r(x) = 5x^2 - 20x + 25$,
denn $d(x)$ ist minimal, wenn der Radikand $r(x)$ minimal ist. *[Die Wurzelfunktion ist streng monoton steigend.]*

Die Radikandenfunktion $r(x)$ ist eine quadratische Funktion, deren Graph eine nach oben geöffnete Parabel ist. Sie nimmt ihren kleinsten Funktionswert an der Stelle $x = x_S$ (Scheitel) an.

$r'(x) = 10x - 20 \overset{!}{=} 0 \;\rightarrow\; x_S = 2$ (gesuchte x-Koordinate von P mit kleinster Entfernung)

Zugehörige y-Koordinate: $f(2) = -2 \cdot 2 + 5 = 1$

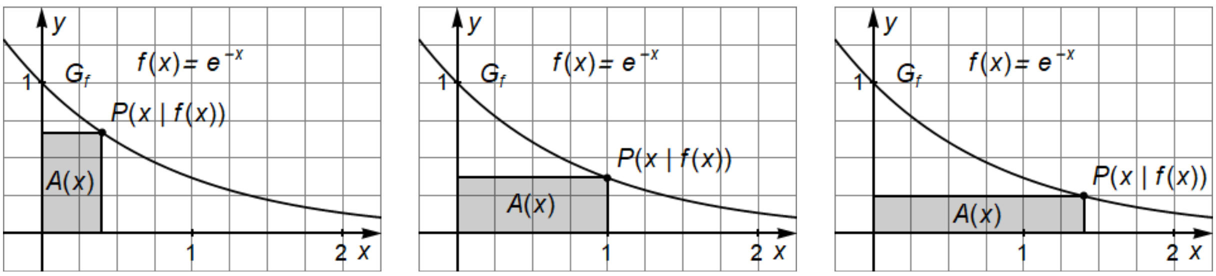
Also: Der Punkt **P(2 | 1)** ist der Punkt auf der Geraden mit minimaler Entfernung vom Ursprung.

[Überprüfe das! Die Strecke vom Ursprung O zum Punkt P(2 | 1) steht senkrecht auf der Geraden.]

2. Bsp.: S. 60 / 2 b) Maximaler Rechteck-Inhalt

Der Ursprung O ist eine Ecke eines Rechtecks, von dem zwei Seiten auf den Koordinatenachsen liegen.
Der Punkt $P(x \mid f(x))$ liegt im I. Quadranten auf dem Graphen G_f der Funktion f mit $f(x) = e^{-x}$.

Für welchen Punkt P ist der Inhalt der Rechteckfläche am größten?



① *Aufstellen der Funktion (bzw. des Funktionsterms) für die Größe, die maximal oder minimal sein soll:*

Flächeninhalt $A(x)$ in Abh. von der x-Koordinate des Punktes P:

$A(x) = „\ell \cdot b“ = x \cdot f(x) = x \cdot e^{-x}$

② *Bestimmen der Maximalstelle bzw. Minimalstelle:*

Wir suchen die Maximalstelle, die Waagrechtstelle ist, also:

$A'(x) \overset{\text{(Produktregel)}}{=} 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) = 1 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x} = (1 - x) \cdot e^{-x} \overset{!}{=} 0$

$e^{-x} > 0$, deshalb $1 - x \overset{!}{=} 0 \;\rightarrow\; x_W = 1$ (gesuchte x-Koordinate von P für größten Rechteck-Inhalt)

Es handelt sich um eine Maximalstelle, da der Flächeninhalt des Rechtecks gegen 0 geht
sowohl für $x \to 0$ (verschwindende Breite x) als auch für $x \to \infty$ (verschwindende Höhe f(x)).

Zugehörige y-Koordinate: $f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Also: Für $\mathbf{P(1 \mid \frac{1}{e})}$ hat das Rechteck den maximalen Inhalt. *[mittlere Abbildung]*