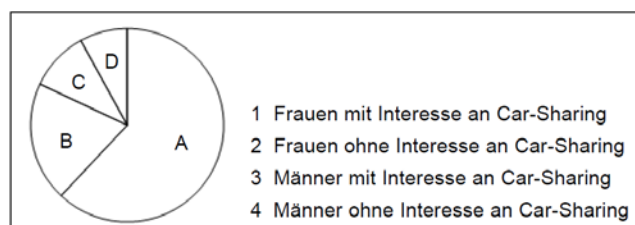


Mathe-Abitur 2018 – Stochastik – Aufgabengruppe 2

Teil A (ohne Hilfsmittel)

- 1 Anlässlich einer Studie wurden 300 weibliche und 700 männliche Bewohner einer Großstadt im Alter von 18 bis 30 Jahren dazu befragt, ob sie Interesse an Car-Sharing haben. 20 % der Befragten waren weiblich und gaben an, nicht interessiert zu sein. 8 % der Befragten waren männlich und gaben an, Interesse an Car-Sharing zu haben. Das Kreisdiagramm veranschaulicht die absoluten Häufigkeiten, die sich bei der Befragung ergaben.



4 BE

- a) Ordnen Sie die Beschriftungen 1 bis 4 den Sektoren A bis D korrekt zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

Es empfiehlt sich das Erstellen einer Vierfeldertafel für die relativen Häufigkeiten (besser als Dezimalbruch, nicht in %):

W: „weiblich“ ; M: „männlich“ ; I: „Interesse“ ; $\bar{I}$: „kein Int.“

Dann sortiert man am einfachsten nach der Größe der „UND-Häufigkeiten“ (die inneren vier Felder):

✱	W	M	✱
I	0,10	0,08	„egal“
$\bar{I}$	0,20	0,62	„egal“
✱	0,30	0,70	1

Also: „M“ und „I“: 0,08 → Sektor D (kleinster Sektor) $\hat{=}$ 3

„W“ und „I“: 0,10 → Sektor C (zweitkl. Sektor) $\hat{=}$ 1

„W“ und „ $\bar{I}$ “: 0,20 → Sektor B (zweitgr. Sektor) $\hat{=}$ 2

„M“ und „ $\bar{I}$ “: 0,62 → Sektor A (größter Sektor) $\hat{=}$ 4

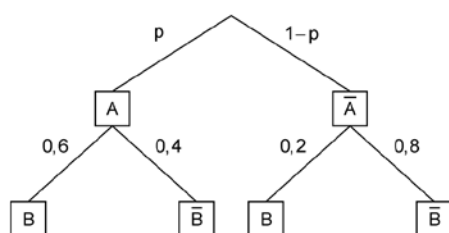
auch andere Lösungswege und Begründungen möglich

1 BE

- b) Berechnen Sie die Größe des Mittelpunktswinkels desjenigen Sektors, der den Anteil der Befragten veranschaulicht, die männlich waren und angaben, Interesse an Car-Sharing zu haben.

„M“ und „I“: Anteil: 0,08 vom Vollkreis (360°) ; Mittelpunktswinkel $\mu = 0,08 \cdot 360^\circ = 28,8^\circ$

- 2 Das abgebildete Baumdiagramm stellt ein zweistufiges Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B sowie deren Gegenereignissen $\bar{A}$ und $\bar{B}$ dar.



2 BE

- a) Bestimmen Sie den Wert von p so, dass das Ereignis B bei diesem Zufallsexperiment mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 eintritt.

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = p \cdot 0,6 + (1 - p) \cdot 0,2 = 0,6p + 0,2 - 0,2p = 0,4p + 0,2 \stackrel{!}{=} 0,3$$

$$\rightarrow p = \frac{0,3 - 0,2}{0,4} = \frac{0,1}{0,4} \stackrel{\text{Erweitern mit 10}}{=} \frac{1}{4} [= 0,25]$$

3 BE

- b) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wert, den die Wahrscheinlichkeit von B annehmen kann.

$$P(B) = 0,4p + 0,2 \quad (\text{siehe a)})$$

$$\text{Da } 0 \leq p \leq 1, \text{ ist } P(B) \text{ maximal für } p = 1: P(B) = 0,4 \cdot 1 + 0,2 = 0,4 + 0,2 = 0,6$$

Teil B (mit Hilfsmitteln)

- 1 Ein Unternehmen stellt Kunststoffteile her. Erfahrungsgemäß sind 4% der hergestellten Teile fehlerhaft. Die Anzahl fehlerhafter Teile unter zufällig ausgewählten kann als binomialverteilt angenommen werden.

3 BE

- a) 50 Kunststoffteile werden zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: „Genau zwei der Teile sind fehlerhaft.“

B: „Mindestens 6% der Teile sind fehlerhaft.“

X: „Anzahl fehlerhafter Teile“

$$P(A) = P_{0,04}^{50}(X = 2) \stackrel{\text{Tafelwerk S. 10}}{=} 0,27623$$

$$6 \% \text{ von } 50 = 0,06 \cdot 50 = 3$$

$$P(B) = P_{0,04}^{50}(X \geq 3) = 1 - P_{0,04}^{50}(X \leq 2) \stackrel{\text{Tafelwerk S. 10}}{=} 1 - 0,67377 = 0,32623$$

Die Kunststoffteile werden aus Kunststoffgranulat hergestellt. Nach einem Wechsel des Granulats vermutet der Produktionsleiter, dass sich der Anteil der fehlerhaften Teile reduziert hat. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob die Vermutung gerechtfertigt ist, soll die Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Teile beträgt mindestens 4 %.“ auf der Grundlage einer Stichprobe von 200 Teilen auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.

4 BE

- b) Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

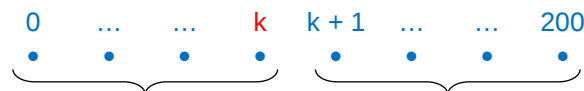
Nullhypothese: $H_0: p \geq 0,04$ („viele fehlerhafte Teile“)

p: Anteil der fehlerhaften Teile ; X: „Anzahl der fehlerhaften Teile“ ; Stichprobenlänge: $n = 200$

Es soll nur mit einem Risiko von 5 % der Anteil der fehlerhaften Teile zu unrecht für niedrig gehalten werden (H_0 wird abgelehnt), obwohl der Anteil in Wirklichkeit hoch ist („viele fehlerhafte Teile“, d. h. H_0 trifft zu).

Aus dieser Forderung ergibt sich die Entscheidungsregel:

Die möglichen Werte für die Zufallsgröße X: „Anzahl der fehlerhaften Teile“ werden aufgeteilt:



Ablehnungsbereich $\bar{A}$
(„wenige fehlerh. Teile“)

Annahmebereich A
(„viele fehlerh. Teile“)

auch ausreichend:

$$A = \{k+1; \dots; 200\}$$

$$\bar{A} = \{0; 1; \dots; k\}$$

Aus der Forderung $P(\text{„Fehler 1. Art“}) \stackrel{!}{\leq} 5 \%$ ergibt sich:

Fehler 1. Art: H_0 trifft zu, $\rightarrow p \geq 0,04$
wird (fälschlich) abgelehnt. $\rightarrow X \in \bar{A}$, d. h. $X \leq k$

Für den Produktionsleiter ist der riskanteste Fall, dass der Anteil der fehlerh. Teile genau 4 % ist, denn ab 4 % „fehlerhaft“ ist das neue Granulat nicht besser. Deshalb: $p = 0,04$.

$$\text{Also: } P_{0,04}^{200}(X \in \bar{A}) \stackrel{!}{\leq} 5 \%$$

$$P_{0,04}^{200}(X \leq k) \leq 0,05$$

Wir müssen nun im Tafelwerk bei der Binomialverteilung für $p = 0,04$ und $n = 200$ nachsehen, bis zu welchem k die Summenwahrscheinlichkeit (rechte Spalte) noch kleiner oder auch gleich 0,05 ist.

Tafelwerk (S. 10): $P_{0,04}^{200}(X \leq 3) = 0,03953$ ($\leq 0,05$ „passt“) und zum Vergleich:

$$P_{0,04}^{200}(X \leq 4) = 0,09502 \quad (> 0,05 \text{ „zu groß“})$$

Also: $k = 3$, folglich ergibt sich nun als Entscheidungsregel:

$X \in A = \{4; 5; \dots; 200\} \rightarrow H_0$ wird beibehalten („viele fehlerhafte Teile“)

$X \in \bar{A} = \{0; 1; 2; 3\} \rightarrow H_0$ wird abgelehnt („neues Granulat ist besser“)

3 BE

- c) Das neue Granulat ist teurer als das vorherige. Geben Sie an, welche Überlegung zur Wahl der Nullhypothese geführt haben könnte, und begründen Sie Ihre Angabe.

Der Produktionsleiter möchte nur mit einem Risiko von 5 % (Signifikanzniveau) das neue, teurere Granulat aufgrund des Test-Ergebnisses für besser („weniger fehlerhafte Teile“) halten, obwohl das neue Granulat in Wirklichkeit nicht besser ist (H_0 trifft zu: $p \geq 0,04$). [oder so ähnlich]

- 2 Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet, das drei farbige Sektoren hat. Der Tabelle können die Farben der Sektoren und die Größen der zugehörigen Mittelpunktswinkel entnommen werden.

Farbe	Blau	Rot	Grün
Mittelpunktswinkel	180°	120°	60°

Für einen Einsatz von 5 Euro darf ein Spieler das Glücksrad dreimal drehen. Erzielt der Spieler dreimal die gleiche Farbe, werden ihm 10 Euro ausgezahlt. Erzielt er drei verschiedene Farben, wird ein anderer Betrag ausgezahlt. In allen anderen Fällen erfolgt keine Auszahlung.

2 BE

- a) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dreimal die gleiche Farbe erzielt wird, ist $\frac{1}{6}$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei verschiedene Farben erzielt werden, ebenfalls $\frac{1}{6}$ beträgt.

$$p_{\text{Blau}} = \frac{180^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} ; \quad p_{\text{Rot}} = \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3} ; \quad p_{\text{Grün}} = \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{„drei verschiedene Farben“}) = P(\text{„B-R-G“}) + P(\text{„R-G-B“}) + P(\text{„G-B-R“}) + P(\text{„G-R-B“}) + \dots$$

schlauer: Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es für die 3 Farben? $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

$$P(\text{„drei verschiedene Farben“}) = 3! \cdot p_{\text{Blau}} \cdot p_{\text{Rot}} \cdot p_{\text{Grün}} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

3 BE

- b) Bei dem Spiel ist zu erwarten, dass sich die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen auf lange Sicht ausgleichen. Berechnen Sie den Betrag, der ausgezahlt wird, wenn drei verschiedene Farben erscheinen.

„auf lange Sicht ausgleichen“ läuft auf den Erwartungswert einer Zufallsgröße hinaus.

Dazu benötigt man die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße (d. h. die Tabelle mit x und $P(X = x)$).

Zunächst legt man fest, um welche Zufallsgröße X es sich hier handelt: X : Auszahlung bei einem Spiel

Dann „baut“ man aus den Informationen im Aufgabentext die Tabelle „zusammen“:

X : Auszahlung bei einem Spiel

Glücksrad-Ergebnis:	„3 gleiche Farben“	„3 versch. Farben“	„sonst“
Auszahlung: x	10 (€)	a	0 (€)
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

Für die gesuchte Auszahlung bei „3 versch. Farben“ legt man eine Variable fest (hier: a ; auch möglich: b ; nicht so gut: x).

Die Wahrscheinlichkeit für „sonst“ ergibt sich aus der Summe 1 aller Wahrscheinlichkeiten ...

... vermindert um die (in der Aufgabenstellung fairerweise gegebenen) Wahrscheinlichkeiten der beiden anderen Fälle.

Genau genommen wird diese Wahrscheinlichkeit beim Ansatz für den Erwartungswert von X „Auszahlung bei einem Spiel“ gar nicht benötigt, weil im Fall „sonst“ ja keine Auszahlung erfolgt ($x = 0$).

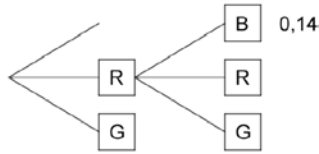
Der Erwartungswert soll wegen „auf lange Sicht ausgleichen“ gleich dem Einsatz, 5 (€), sein:

$$E(X) = 10 \cdot \frac{1}{6} + a \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{6} + \frac{1}{6} \cdot a \stackrel{!}{=} 5 ; \quad | \cdot 6$$

$$a = (5 - \frac{10}{6}) \cdot 6 = 30 - 10 = 20 \rightarrow \text{Bei „3 verschiedene Farben“ werden 20 € ausgezahlt.}$$

5 BE

- c) Die Größen der Sektoren werden geändert. Dabei werden der grüne und der rote Sektor verkleinert, wobei der Mittelpunktswinkel des roten Sektors wieder doppelt so groß wie der des grünen Sektors ist. Die Abbildung zeigt einen Teil eines Baumdiagramms, das für das geänderte Glücksrad die beiden ersten Drehungen beschreibt. Ergänzend ist für einen Pfad die zugehörige Wahrscheinlichkeit angegeben.



Bestimmen Sie die Größe des zum grünen Sektor gehörenden Mittelpunktswinkels.

Gesucht ist die Größe des zum grünen Sektor gehörenden Mittelpunktswinkels, deshalb empfiehlt es sich, die Wahrscheinlichkeit für „Grün“ mit einer „einfachen“ Variable (ohne Index) zu bezeichnen:

$p_{\text{Grün}} = p$ ($< \frac{1}{6}$) ; „Rot“ doppelt so groß: $p_{\text{Rot}} = 2p$; „Blau“ ist „Rest“: $p_{\text{Blau}} = 1 - p - 2p = 1 - 3p$

Aus dem abgebildeten Pfad ergibt sich: $p_{\text{Rot}} \cdot p_{\text{Blau}} = 0,14$; also: $2p \cdot (1 - 3p) = 0,14$;

$2p - 6p^2 = 0,14$; [Das ist eine quadratische Gleichung für $p = p_{\text{Grün}} \rightarrow$ „Sortieren“] $+ 6p^2 \quad | - 2p$

$6p^2 - 2p + 0,14 = 0$;

$$p_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 6 \cdot 0,14}}{2 \cdot 6} = \frac{2 \pm 0,8}{12}$$

$\rightarrow p_1 = \frac{2 - 0,8}{12} = \frac{1}{10}$ ($< \frac{1}{6}$ „passt“, $p_{\text{Grün}}$ soll ja kleiner als zuvor werden)

$\rightarrow p_2 = \frac{2 + 0,8}{12} = \frac{7}{30}$ ($> \frac{1}{6} = \frac{5}{30}$ „passt NICHT“, $p_{\text{Grün}}$ soll doch kleiner als zuvor werden)

Also: $p_{\text{Grün}} = \frac{1}{10}$ und folglich $\mu_{\text{Grün}} = \frac{1}{10} \cdot 360^\circ = 36^\circ$