

Analysis

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

- 1** Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \sqrt{x+1} - 2$ mit maximaler Definitionsmenge D.

1 **a)** Geben Sie D an.

4 **b)** Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von g im Punkt $(8 | g(8))$.

- 2** Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$, die die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat. Abbildung 1 zeigt den Graphen von f, der symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung $y = -3$ gegeben.

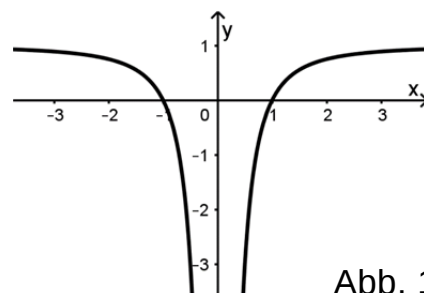


Abb. 1

1 **a)** Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x-Koordinate $\frac{1}{2}$ hat.

4 **b)** Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die x-Achse und die Gerade g einschließen.

- 3** Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $p_k: x \mapsto kx^2 - 4x - 3$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, deren Graphen Parabeln sind.

2 **a)** Bestimmen Sie den Wert von k so, dass der Punkt $(2 | -3)$ auf der zugehörigen Parabel liegt.

3 **b)** Ermitteln Sie diejenigen Werte von k, für die die jeweils zugehörige Funktion p_k keine Nullstelle besitzt.

(Fortsetzung nächste Seite)

- 4 Die nebenstehende Abbildung 2 zeigt den Graphen einer Funktion f .

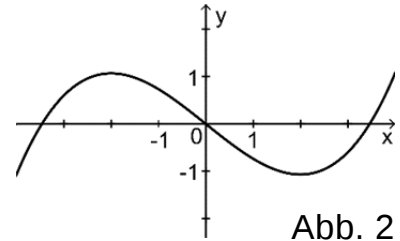
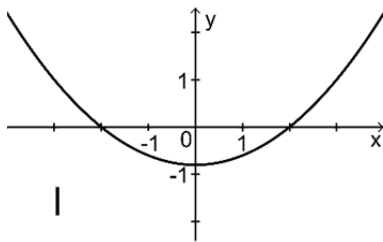


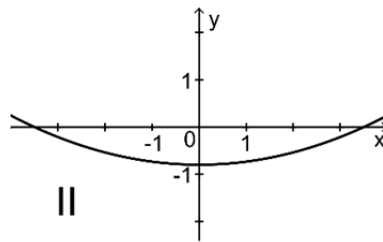
Abb. 2

3

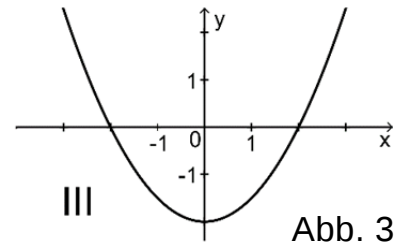
- a) Einer der folgenden Graphen I, II und III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f . Geben Sie diesen Graphen an. Begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.



I



II



III

Abb. 3

2

- b) Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f . Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall $[1; 3]$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

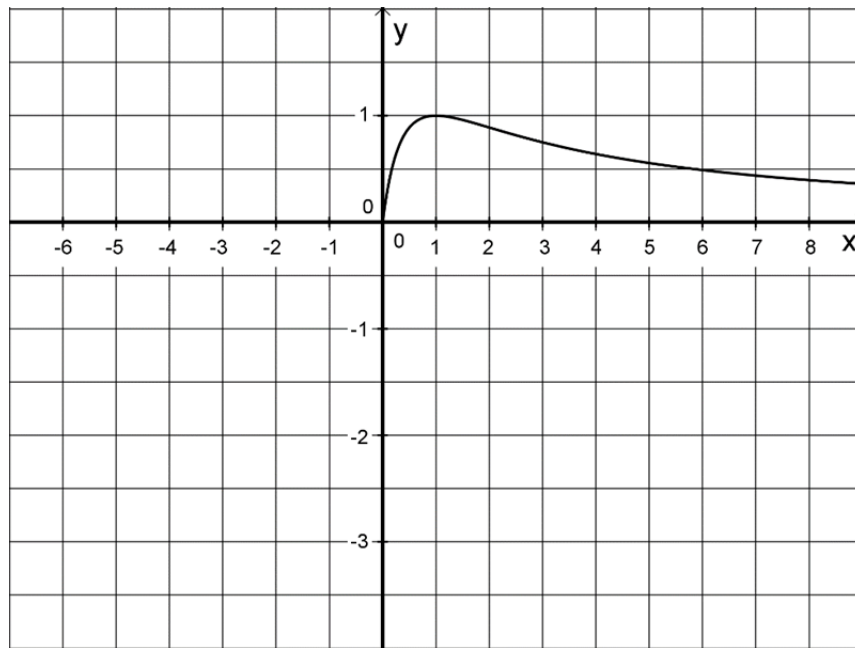
Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{4x}{(x+1)^2}$ mit Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Die Abbildung zeigt den Verlauf des Graphen G_f von f im I. Quadranten.



- 3 a) Begründen Sie, dass $x = 0$ die einzige Nullstelle von f ist. Geben Sie die Gleichung der senkrechten Asymptote von G_f an und begründen Sie anhand des Funktionsterms von f , dass G_f die Gerade mit der Gleichung $y = 0$ als waagrechte Asymptote besitzt.
- 5 b) Bestimmen Sie rechnerisch Lage und Art des Extrempunkts von G_f .
- 4 c) Begründen Sie, dass G_f für $x < 0$ nur im III. Quadranten verläuft, und zeichnen Sie in die Abbildung den darin fehlenden Teil von G_f ein. Berechnen Sie dazu $f(-3)$ und drei weitere geeignete Funktionswerte von f .
- 3 d) Gegeben ist ferner die in $]-1; +\infty[$ definierte Funktion
- $$F: x \mapsto 4 \cdot \ln(x+1) + \frac{4}{x+1}.$$
- Zeigen Sie, dass F für $x > -1$ eine Stammfunktion von f ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

Ein Pharmaunternehmen führt eine Studie zur Wirksamkeit und Verträglichkeit eines neu entwickelten Medikaments durch. Wenn das Medikament einmalig in Form einer Tablette eingenommen wird, kann die zeitliche Entwicklung der Konzentration des Wirkstoffs im Blut des Patienten modellhaft durch die betrachtete Funktion f für $x \in [0; 9]$ beschrieben werden. Dabei steht x für die Zeit in Stunden seit der Einnahme der Tablette und $f(x)$ für die Konzentration des Wirkstoffs im Blut des Patienten (im Weiteren kurz als Wirkstoffkonzentration bezeichnet) in Milligramm pro Liter ($\frac{\text{mg}}{\text{l}}$).

Die folgenden Aufgaben e bis i sollen auf der Grundlage dieses Modells bearbeitet werden.

2 **e)** Berechnen Sie die Wirkstoffkonzentration 30 Minuten nach Einnahme der Tablette und geben Sie die maximal auftretende Wirkstoffkonzentration an.

3 **f)** An der Stelle $x = 2$ hat G_f einen Wendepunkt. Beschreiben Sie, wie man rechnerisch vorgehen könnte, um dies zu begründen. Geben Sie die Bedeutung der x -Koordinate des Wendepunkts im Sachzusammenhang an.

In der Pharmakologie wird das in positive x -Richtung unbegrenzte Flächenstück, das sich im I. Quadranten zwischen G_f und der x -Achse befindet, als AUC („area under the curve“) bezeichnet. Nur dann, wenn diesem Flächenstück ein endlicher Flächeninhalt zugeordnet werden kann, kann die betrachtete Funktion f die zeitliche Entwicklung der Wirkstoffkonzentration auch für große Zeitwerte x realistisch beschreiben.

4 **g)** Die x -Achse, G_f und die Gerade mit der Gleichung $x = b$ mit $b \in \mathbb{R}^+$ schließen im I. Quadranten ein Flächenstück mit dem Inhalt $A(b)$ ein. Bestimmen Sie mithilfe der in Aufgabe d angegebenen Stammfunktion F einen Term für $A(b)$ und beurteilen Sie unter Verwendung dieses Terms, ob die Funktion f auch für große Zeitwerte eine realistische Modellierung der zeitlichen Entwicklung der Wirkstoffkonzentration darstellt.

(Fortsetzung nächste Seite)

Das Medikament zeigt die gewünschte Wirkung erst ab einer bestimmten Wirkstoffkonzentration. Daher soll der Patient nach der ersten Tablette des Medikaments eine zweite identisch wirkende Tablette einnehmen, noch bevor die Konzentration des Wirkstoffs im Blut unter $0,75 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ fällt. Nach der Einnahme der zweiten Tablette erhöht sich die Wirkstoffkonzentration um die durch diese Tablette verursachte Konzentration des Wirkstoffs im Blut.

- 4 **h)** Ermitteln Sie durch Rechnung den spätesten Zeitpunkt, zu dem die zweite Tablette eingenommen werden soll.
- 3 **i)** Wird die zweite Tablette zweieinhalb Stunden nach der ersten Tablette eingenommen, so kann die Wirkstoffkonzentration für $x \in [2,5; 9]$ mit einem der folgenden Terme beschrieben werden. Wählen Sie den passenden Term aus und begründen Sie Ihre Wahl.
- (A) $f(x) + f(x + 2,5)$
 - (B) $f(x) + f(x - 2,5)$
 - (C) $f(x - 2,5) + f(2,5)$
 - (D) $f(x) - f(x - 2,5)$

Verabreicht man das Medikament nicht in Form von Tabletten, sondern mittels einer Dauerinfusion, so wird der Wirkstoff langsam und kontinuierlich

zugeführt. Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $k: x \mapsto \frac{3 \cdot e^{2x}}{e^{2x} + 1} - 1,5$ beschreibt für $x \geq 0$ modellhaft die zeitliche Entwicklung der Wirkstoffkonzentration während einer Dauerinfusion. Dabei ist x die seit Anlegen der Dauerinfusion vergangene Zeit in Stunden und $k(x)$ die Wirkstoffkonzentration in $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$.

- 4 **j)** Begründen Sie, dass der Graph von k streng monoton steigend ist.

$$(zur\ Kontrolle: k'(x) = \frac{6e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2})$$

- 5 **k)** Bei Dauerinfusionen dieses Medikaments muss die Wirkstoffkonzentration spätestens 60 Minuten nach Beginn der Infusion dauerhaft größer als $0,75 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ sein und stets mindestens 25 % unter der gesundheitsschädlichen Grenze von $2 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ liegen. Ermitteln Sie $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$ und beurteilen Sie beispielsweise unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse, ob gemäß der Modellierung diese beiden Bedingungen erfüllt sind.