

Mathe-Abitur 2019 – Analysis – Aufgabengruppe 2

Teil A (ohne Hilfsmittel)

1 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \sqrt{x+1} - 2$ mit maximaler Definitionsmenge D.

1 BE

a) Geben Sie D an.

Wurzel(-funktion): Radikand darf nicht negativ sein, also: $x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \rightarrow \mathbb{D} = [-1; +\infty[$

4 BE

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von g im Punkt (8 | g(8)).

Zunächst: y-Koordinate des Berührungspunktes: $g(8) = \sqrt{8+1} - 2 = 3 - 2 = 1 \rightarrow P(8 | 1)$

Eine Tangente ist eine Gerade: $y = m \cdot x + t$

Die Steigung m ist die Steigung des Graphen G_g der Funktion g an der x-Koordinate von P:

Zunächst: $g'(x) = \frac{d}{dx}((x+1)^{1/2} - 2) = \frac{1}{2} \cdot (x+1)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \rightarrow g'(8) = \frac{1}{2\sqrt{8+1}} = \frac{1}{6}$

Bemerkung: $\frac{d}{dx}(\dots)$ ist ein „Differentialoperator“: Was in der Klammer steht, wird nach x abgeleitet.

Einsetzen von $m = \frac{1}{6}$ und $x_P = 8$ und $y_P = 1$ in $y = m \cdot x + t$:

$$1 = \frac{1}{6} \cdot 8 + t ; \quad 1 = \frac{4}{3} + t ; \quad t = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

Tangente: $y = \frac{1}{6} \cdot x - \frac{1}{3}$

2 Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$, die die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat. Abbildung 1 zeigt den Graphen von f, der symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung $y = -3$ gegeben.

1 BE

a) Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x-Koordinate $\frac{1}{2}$ hat.

Am einfachsten ist hier, dass man zeigt, dass $f(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2})$ ist:

$$f(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = 1 - \frac{1}{1/4} \stackrel{\text{Kehrrbruch}}{=} 1 - 4 = 1 - 4 = -3 = g(\frac{1}{2})$$

Natürlich kann man auch die Schnittstellen von G_f und G_g berechnen durch $f(x) \stackrel{!}{=} g(x)$. Dies führt aber auf eine (rein-)quadratische Gleichung, was deutlich aufwändiger zu bearbeiten ist.

4 BE

b) Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die x-Achse und die Gerade g einschließen.

Man kennzeichnet am besten zunächst im Graphen, um welche Fläche es sich handelt, und zerlegt diese Fläche dann in geeignete Teilflächen. Dabei berücksichtigt man die Symmetrie von G_f .

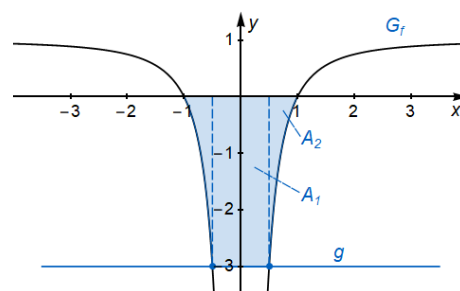
A_1 lässt sich elementargeometrisch als Rechteck-Fläche berechnen.

A_2 berechnet man mit einem bestimmten Integral.

Da A_2 unterhalb der x-Achse liegt, sind die Betragsstriche notwendig („Durchziehen“!).

$$\begin{aligned} A &= A_1 + 2 \cdot A_2 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot \left| \int_{1/2}^1 f(x) dx \right| = 3 + 2 \cdot \left| \int_{1/2}^1 (1 - x^{-2}) dx \right| = 3 + 2 \cdot \left| [x + x^{-1}]_{1/2}^1 \right| = \\ &= 3 + 2 \cdot \left| [x + \frac{1}{x}]_{1/2}^1 \right| = 3 + 2 \cdot \left| 1 + \frac{1}{1} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{1/2}) \right| = 3 + 2 \cdot |2 - (1/2 + 2)| = \\ &= 3 + 2 \cdot |2 - 2,5| = 3 + 2 \cdot |-0,5| = 3 + 2 \cdot 0,5 = 3 + 1 = 4 \quad [\text{nicht alle Schritte notwendig}] \end{aligned}$$

Vergleich mit dem Graphen: Joa, könnte stimmen.



- 3 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $p_k: x \mapsto kx^2 - 4x - 3$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, deren Graphen Parabeln sind.

- 2 BE a) Bestimmen Sie den Wert von k so, dass der Punkt $(2 | -3)$ auf der zugehörigen Parabel liegt.

Einsetzen von $x_P = 2$ und $y_P = -3$ in
 $y = kx^2 - 4x - 3$:

$$-3 = k \cdot 4 - 8 - 3 \rightarrow k = 2$$

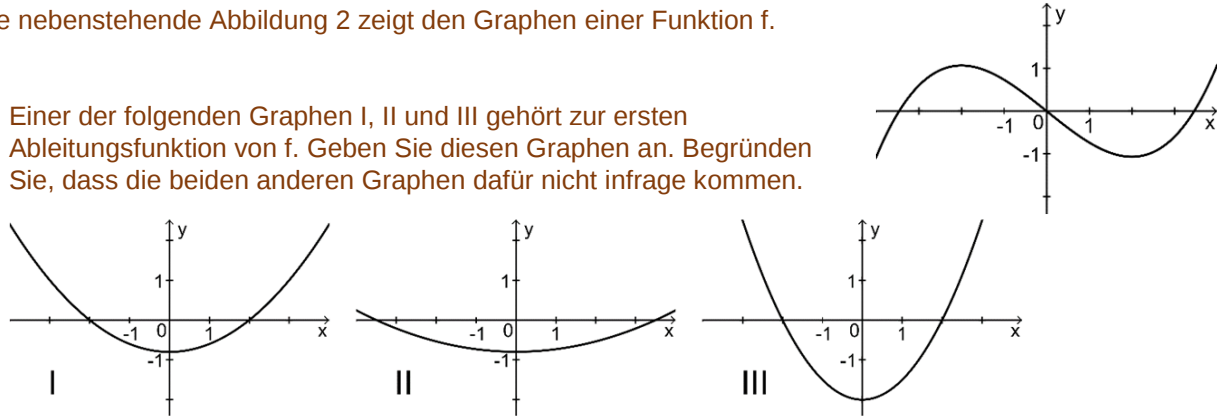
- 3 BE b) Ermitteln Sie diejenigen Werte von k , für die die jeweils zugehörige Funktion p_k keine Nullstelle besitzt.

„keine Nullstelle“ bedeutet, dass die quadratische Gleichung $kx^2 - 4x - 3 = 0$ keine Lösung hat. Dies ist der Fall, wenn die Diskriminante $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$ ist:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 16 - 4 \cdot k \cdot (-3) = 16 + 12k \stackrel{!}{<} 0 \rightarrow 12k < -16 \rightarrow k < -\frac{16}{12} = -\frac{4}{3}$$

- 4 Die nebenstehende Abbildung 2 zeigt den Graphen einer Funktion f .

- 3 BE a) Einer der folgenden Graphen I, II und III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f . Geben Sie diesen Graphen an. Begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.



G_f hat die Waagrechtstellen $x_{w1} = -2$ und $x_{w2} = 2$. An diesen Stellen muss f' Nullstellen haben. Dies ist nur bei „I“ und „III“ der Fall. Deshalb scheidet „II“ aus.

An der Stelle $x = 0$ hat G_f eine Steigung von ungefähr $-0,8$ (keinesfalls aber: -2). An dieser Stelle muss auch die Ableitung f' den Wert $-0,8$ haben. Deshalb scheidet „III“ aus.

Damit ist „I“ der Graph der Ableitungsfunktion f' . [oder so ähnlich]

- 2 BE b) Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f . Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall $[1; 3]$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

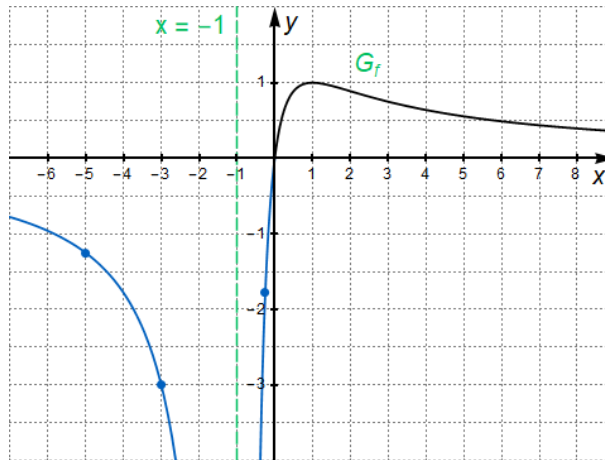
F soll Stammfunktion von f sein. Deshalb gilt: $F'(x) = f(x)$: Die Funktionswerte von f bestimmen also das Monotonieverhalten von F :

Im Intervall $[1; 3]$ verläuft G_f unterhalb der x -Achse. Dort gilt also: $F'(x) = f(x) < 0$.
 Folglich ist F (bzw. G_F) im Intervall $[1; 3]$ streng monoton fallend.

Teil B (mit Hilfsmitteln)

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{4x}{(x+1)^2}$ mit Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Die Abbildung zeigt den Verlauf des Graphen G_f von f im I. Quadranten.



3 BE

- a) Begründen Sie, dass $x = 0$ die einzige Nullstelle von f ist. Geben Sie die Gleichung der senkrechten Asymptote von G_f an und begründen Sie anhand des Funktionsterms von f , dass G_f die Gerade mit der Gleichung $y = 0$ als waagrechte Asymptote besitzt.

$f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$, also ein Bruch. Ein Bruch hat den Wert 0, wenn Zähler = 0 und Nenner $\neq 0$.

Zähler: $4x = 0$ für $x = 0$; für $x = 0$ hat der Nenner den Wert 1 $\rightarrow x = 0$ ist einzige Nullstelle

Senkrechte Asymptoten: Kandidaten sind die Nullstellen des Nenners (wenn dort Zähler $\neq 0$):

$x = -1$ ist die (einzige) Nullstelle des Nenners, dort hat der Zähler den Wert -4

$\rightarrow$ senkr. Asymptote: $x = -1$ ($x = -1$ ist eine Polstelle ohne VZW wegen $(x+1)^2$)

waagrechte (und auch schräge) Asymptoten: Verhalten von f im Unendlichen:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x^2 + 2x + 1} \quad \begin{array}{l} \text{Jeden Summanden in Z u. N} \\ \text{durch x dividieren} \end{array} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x + 2 + 1/x} = \frac{4}{\pm\infty + 2 \pm 0} = 0$$

$\rightarrow y = 0$ ist waagrechte Asymptote

Auch möglich: Die Nennerfunktion ist eine quadratische Funktion, deren Funktionswerte im Unendlichen schneller wachsen als (betragsmäßig) die Funktionswerte der Zählerfunktion, die („nur“) eine lineare Funktion ist.

Deshalb geht $f(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$ gegen 0, so dass $y = 0$ die Gleichung der waagrechten Asymptote ist.

5 BE

- b) Bestimmen Sie rechnerisch Lage und Art des Extrempunkts von G_f .

Kandidaten für Extremalstellen: Waagrechtstellen, d. h. die Nullstellen der 1. Ableitung:

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 \cdot 4 - 4x \cdot 2 \cdot (x+1) \cdot 1}{(x+1)^4} \quad \begin{array}{l} \text{Kürzen mit } (x+1) \\ \text{mit } (x+1) \end{array} = \frac{(x+1) \cdot 4 - 4x \cdot 2}{(x+1)^3} = \frac{4x + 4 - 8x}{(x+1)^3} = \frac{4 - 4x}{(x+1)^3} \stackrel{!}{=} 0$$

Zähler: $4 - 4x = 0$ für $x_w = 1$ (Nenner: $(1+1)^3 = 2^3 = 8 \neq 0$)

$\rightarrow x_w = 1$ ist (einzige) Waagrechtstelle.

Art der Waagrechtstelle: In der Umgebung von $x_w = 1$ ist der Nenner von $f'(x)$ positiv.

Die (lineare) Zählerfunktion von $f'(x)$, $4 - 4x$, hat an der Stelle $x_w = 1$ einen VZW:

Für $x < 1$ ist $4 - 4x > 0$, sodass $f'(x) > 0$ und G_f smf für $x < 1$,

Für $x > 1$ ist $4 - 4x < 0$, sodass $f'(x) < 0$ und G_f smf für $x > 1$.

Folglich ist $x_w = 1$ eine Maximalstelle.

$$f(1) = \frac{4 \cdot 1}{(1+1)^2} = \frac{4}{2^2} = \frac{4}{4} = 1 \rightarrow \text{HOP}(1 | 1) \quad [\text{Berechnung von } f(1) \text{ hier nötig, weil aus Graph ablesbar wäre}]$$

Die Art der Waagrechtstelle könnte auch mit Hilfe der 2. Ableitung bestimmt werden oder mit Hilfe einer Vorzeichentabelle für $f'(x)$, wobei nur die Umgebung von $x_w = 1$ von Interesse ist.

4 BE

- c) Begründen Sie, dass G_f für $x < 0$ nur im III. Quadranten verläuft, und zeichnen Sie in die Abbildung den darin fehlenden Teil von G_f ein. Berechnen Sie dazu $f(-3)$ und drei weitere geeignete Funktionswerte von f .

Wir betrachten $f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$ für „Argumente“ $x < 0$:

Der Zähler von $f(x)$, „ $4x$ “, ist negativ für $x < 0$.

Der Nenner von $f(x)$, „ $(x+1)^2$ “, ist für $x < 0$ und $x \neq -1$ ($\notin \mathbb{D}_f$) positiv.

→ $f(x)$ ist für $x < 0$ und $x \neq -1$ ($\notin \mathbb{D}_f$) negativ, sodass G_f im III. Quadranten verläuft.

[auch andere Argumentationen möglich]

$$f(-3) = \dots = -3; \quad f(-5) = \dots = -1,25;$$

$$f(-0,5) = \dots = -8 \quad (\text{außerhalb des KoSy, auch eine Information}); \quad f(-0,25) = \dots = -16/9 \approx -1,78$$

[auch Berechnung von Funktionswerten an anderen Stellen möglich]

Ergänzter Graph: Siehe oben!

3 BE

- d) Gegeben ist ferner die in $]-1; +\infty[$ definierte Funktion

$$F: x \mapsto 4 \cdot \ln(x+1) + \frac{4}{x+1}.$$

Zeigen Sie, dass F für $x > -1$ eine Stammfunktion von f ist.

F ist Stammfunktion von f , wenn gilt: $F'(x) = f(x)$. Also: $F(x)$ zunächst umformen, dann ableiten:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}(4 \cdot \ln(x+1) + 4 \cdot (x+1)^{-1}) = 4 \cdot \frac{1}{x+1} + 4 \cdot (-1) \cdot (x+1)^{-2} = \\ &= \frac{4}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} \quad \text{gleichnamig machen} \quad \frac{4 \cdot (x+1)}{(x+1)^2} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{4x+4-4}{(x+1)^2} = \frac{4x}{(x+1)^2} = f(x) \end{aligned}$$

Bemerkung: $\frac{d}{dx}(\dots)$ ist ein „Differentialoperator“: Was in der Klammer steht, wird nach x abgeleitet.

Die Bedingung „ $x > -1$ “ in der Aufgabenstellung stellt lediglich sicher, dass das Logarithmus-Argument „ $x+1$ “ positiv ist, und muss hier nicht weiter berücksichtigt werden.

Ein Pharmaunternehmen führt eine Studie zur Wirksamkeit und Verträglichkeit eines neu entwickelten Medikaments durch. Wenn das Medikament einmalig in Form einer Tablette eingenommen wird, kann die zeitliche Entwicklung der Konzentration des Wirkstoffs im Blut des Patienten modellhaft durch die betrachtete Funktion f für $x \in [0; 9]$ beschrieben werden. Dabei steht x für die Zeit in Stunden seit der Einnahme der Tablette und $f(x)$ für die Konzentration des Wirkstoffs im Blut des Patienten (im Weiteren kurz als Wirkstoffkonzentration bezeichnet) in Milligramm pro Liter ($\frac{\text{mg}}{\ell}$).

Die folgenden Aufgaben e bis i sollen auf der Grundlage dieses Modells bearbeitet werden.

2 BE

- e) Berechnen Sie die Wirkstoffkonzentration 30 Minuten nach Einnahme der Tablette und geben Sie die maximal auftretende Wirkstoffkonzentration an.

$$x: \text{Zeit in Stunden, d. h. 30 Minuten} \triangleq x = 0,5; \quad \text{Wirkstoffkonzentration } f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2} \text{ in } \text{mg}/\ell$$

$$f(0,5) = \frac{8}{9} = 0,88888\dots \approx 0,89 \text{ [mg}/\ell] \quad \text{Bemerkung: Eine Angabe von } 0,8 \text{ wäre hier „Quatsch“}.$$

Da $f(x)$ die Wirkstoffkonzentration ist, kann auch aus dem Graphen abgelesen werden:

Die Wirkstoffkonzentration ist mit $1,0 \text{ mg}/\ell$ eine Stunde nach der Einnahme ($x = 1$) maximal.

3 BE

- f) An der Stelle $x = 2$ hat G_f einen Wendepunkt. Beschreiben Sie, wie man rechnerisch vorgehen könnte, um dies zu begründen. Geben Sie die Bedeutung der x -Koordinate des Wendepunkts im Sachzusammenhang an.

Die Existenz eines Wendepunktes von G_f an der Stelle $x = 2$ lässt sich begründen, indem man zeigt, dass die 2. Ableitung von f , $f''(x)$, an der Stelle $x = 2$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat. Denn dann ändert sich an der Stelle $x = 2$ die Krümmungsart des Graphen G_f .

Wendestellen eines Graphen sind Stellen, an denen die Steigung des Graphen im Vergleich zur Umgebung maximal oder minimal ist.

Hier: G_f fällt für $x > 1$, d. h. bei $x = 2$ ist die Steigung maximal negativ (d. h. minimal).

Zwei Stunden nach der Einnahme der Tablette nimmt die Wirkstoffkonzentration am schnellsten ab.

In der Pharmakologie wird das in positive x-Richtung unbegrenzte Flächenstück, das sich im I. Quadranten zwischen G_f und der x-Achse befindet, als AUC („area under the curve“) bezeichnet. Nur dann, wenn diesem Flächenstück ein endlicher Flächeninhalt zugeordnet werden kann, kann die betrachtete Funktion f die zeitliche Entwicklung der Wirkstoffkonzentration auch für große Zeitwerte x realistisch beschreiben.

4 BE

- g) Die x-Achse, G_f und die Gerade mit der Gleichung $x = b$ mit $b \in \mathbb{R}^+$ schließen im I. Quadranten ein Flächenstück mit dem Inhalt $A(b)$ ein. Bestimmen Sie mithilfe der in Aufgabe d angegebenen Stammfunktion F einen Term für $A(b)$ und beurteilen Sie unter Verwendung dieses Terms, ob die Funktion f auch für große Zeitwerte eine realistische Modellierung der zeitlichen Entwicklung der Wirkstoffkonzentration darstellt.

$$\begin{aligned} A(b) &= \int_0^b f(x) \, dx \quad F \text{ ist Stammfunktion von } f \quad = \quad [F(x)]_0^b = \left[4 \cdot \ln(x+1) + \frac{4}{x+1} \right]_0^b = \\ &= 4 \cdot \ln(b+1) + \frac{4}{b+1} - \left[4 \cdot \ln(0+1) + \frac{4}{0+1} \right] = 4 \cdot \ln(b+1) + \frac{4}{b+1} - \left[4 \cdot 0 + \frac{4}{1} \right] = \\ &= 4 \cdot \ln(b+1) + \frac{4}{b+1} - 4 \end{aligned}$$

„für große Zeitwerte“ bedeutet hier zusammen mit „das in positive x-Richtung unbegrenzte Flächenstück“: Man muss den Grenzwert von $A(b)$ für $x \rightarrow +\infty$ betrachten:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A(b) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 \cdot \ln(b+1) + \frac{4}{b+1} - 4 \right) = „4 \cdot (+\infty) + \frac{4}{+\infty+1} - 4“ = „+\infty + 0 - 4“ = +\infty$$

[Zur Erinnerung: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, siehe auch „Küchenrollen-Aufgabe“ (Q11-Buch: S. 127 / 13)]

Dem Flächenstück kann kein endlicher Inhalt zugeordnet werden. Deshalb stellt die Funktion f für große Zeitwerte keine realistische Modellierung der zeitlichen Entwicklung der Wirkstoffkonzentration dar.

Das Medikament zeigt die gewünschte Wirkung erst ab einer bestimmten Wirkstoffkonzentration. Daher soll der Patient nach der ersten Tablette des Medikaments eine zweite identisch wirkende Tablette einnehmen, noch bevor die Konzentration des Wirkstoffs im Blut unter $0,75 \frac{\text{mg}}{\ell}$ fällt. Nach der Einnahme der zweiten Tablette erhöht sich die Wirkstoffkonzentration um die durch diese Tablette verursachte Konzentration des Wirkstoffs im Blut.

4 BE

- h) Ermitteln Sie durch Rechnung den spätesten Zeitpunkt, zu dem die zweite Tablette eingenommen werden soll.

Gesucht ist der Zeitpunkt x , zu dem $f(x)$ (bei fallendem G_f) den Wert $0,75$ annimmt. Aus dem gegebenen Graphen kann man ablesen, dass dies bei ca. $x = 3$ zutrifft. Verlangt ist „durch Rechnung“:

$$f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2} \stackrel{!}{=} 0,75; \quad | \cdot (x+1)^2 \rightarrow 4x = 0,75 \cdot (x^2 + 2x + 1); \quad | - 4x$$

$$0,75x^2 - 2,5x + 0,75 = 0; \quad | \cdot 4 \rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm 8}{6} = \frac{5 \pm 4}{3} \quad [\text{alternativ: Lösungsformel aus der quadr. Gleichung mit Dezimalbrüchen}]$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{5-4}{3} = \frac{1}{3} \quad (\text{hier steigt aber } G_f, \text{ die Wirkstoffkonzentration nimmt also erst noch zu})$$

$$x_2 = \frac{5+4}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$\rightarrow$ 3 Stunden nach Einnahme der 1. Tablette muss die 2. Tablette eingenommen werden.

3 BE

- i) Wird die zweite Tablette zweieinhalb Stunden nach der ersten Tablette eingenommen, so kann die Wirkstoffkonzentration für $x \in [2,5; 9]$ mit einem der folgenden Terme beschrieben werden. Wählen Sie den passenden Term aus und begründen Sie Ihre Wahl.

- (A) $f(x) + f(x + 2,5)$
 (B) $f(x) + f(x - 2,5)$
 (C) $f(x - 2,5) + f(2,5)$
 (D) $f(x) - f(x - 2,5)$

Zwischentext (vor h)): „Nach der Einnahme der zweiten Tablette erhöht sich die Wirkstoffkonzentration um die durch diese Tablette verursachte Konzentration des Wirkstoffs im Blut.“ Also:

Die Wirkstoffkonzentrationen (WK) müssen addiert werden.

Für $x = 2,5$ ist die WK durch die 1. Tablette $f(2,5)$, die WK durch die 2. Tablette $f(0)$, zusammen also $f(2,5) + f(0)$.

Für $x = 3,5$ ist die WK durch die 1. Tablette $f(3,5)$, die WK durch die 2. Tablette $f(1)$, zusammen also $f(3,5) + f(1)$.

Beide Bedingungen werden nur durch (B) $f(x) + f(x - 2,5)$ erfüllt.

Verabreicht man das Medikament nicht in Form von Tabletten, sondern mittels einer Dauerinfusion, so wird der Wirkstoff langsam und kontinuierlich zugeführt. Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $k: x \mapsto \frac{3 \cdot e^{2x}}{e^{2x} + 1} - 1,5$ beschreibt für $x \geq 0$ modellhaft die zeitliche Entwicklung der Wirkstoffkonzentration während einer Dauerinfusion. Dabei ist x die seit Anlegen der Dauerinfusion vergangene Zeit in Stunden und $k(x)$ die Wirkstoffkonzentration in $\frac{\text{mg}}{\ell}$.

4 BE

- j) Begründen Sie, dass der Graph von k streng monoton steigend ist. (zur Kontrolle: $k' = \frac{6e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$)

$$k'(x) = \frac{(e^{2x} + 1) \cdot 3 \cdot e^{2x} \cdot 2 - 3 \cdot e^{2x} \cdot e^{2x} \cdot 2}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{6 \cdot e^{2x} \cdot e^{2x} + 6 \cdot e^{2x} \cdot 1 - 6 \cdot e^{2x} \cdot e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{6 \cdot e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$$

G_k ist streng monoton steigend, da $k'(x) > 0$ für alle x :

Die Zählerfunktion von $k'(x)$, „ $6 \cdot e^{2x}$ “, ist stets positiv (da $e^x > 0$ und damit auch $e^{2x} > 0$), ebenso ist die Nennerfunktion von $k'(x)$, „ $(e^{2x} + 1)^2$ “, stets positiv (Quadrat von $e^{2x} + 1 > 1$).

5 BE

- k) Bei Dauerinfusionen dieses Medikaments muss die Wirkstoffkonzentration spätestens 60 Minuten nach Beginn der Infusion dauerhaft größer als $0,75 \frac{\text{mg}}{\ell}$ sein und stets mindestens 25 % unter der gesundheitsschädlichen Grenze von $2 \frac{\text{mg}}{\ell}$ liegen. Ermitteln Sie $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$ und beurteilen Sie beispielsweise unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse, ob gemäß der Modellierung diese beiden Bedingungen erfüllt sind.

1. Bedingung: $k(x) > 0,75$ für $x \geq 1$ (60 min = 1 h)

$$k(1) = \frac{3e^2}{e^2 + 1} - 1,5 = 1,1423... > 0,75$$

Da der Graph von k (und damit auch k) streng monoton steigend ist, ist die Wirkstoffkonzentration nach 60 Minuten stets größer als $1,14 \frac{\text{mg}}{\ell}$.

Die 1. Bedingung ist also erfüllt.

2. Bedingung: $k(x)$ stets mindestens 25 % unterhalb von $2 \frac{\text{mg}}{\ell}$, d. h. stets unterhalb von $1,5 \frac{\text{mg}}{\ell}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3 \cdot e^{2x}}{e^{2x} + 1} - 1,5 \right) \overset{\substack{\text{Jeden Summanden in Z u. N} \\ \text{durch } e^{2x} \text{ dividieren}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{1 + 1/e^{2x}} - 1,5 \right) = \frac{3}{1 + 0} - 1,5 = 1,5$$

Die Wirkstoffkonzentration nähert sich von unten (da k streng monoton steigend ist) dem Grenzwert $1,5 \frac{\text{mg}}{\ell}$ an und bleibt damit stets mindestens 25 % unter der Grenze von $2 \frac{\text{mg}}{\ell}$.

Die 2. Bedingung ist also auch erfüllt.