

Mathe-Abitur 2019 – Stochastik – Aufgabengruppe 2

Teil A (ohne Hilfsmittel)

- 1 Ein Glücksrad besteht aus fünf gleich großen Sektoren. Einer der Sektoren ist mit „0“ beschriftet, einer mit „1“ und einer mit „2“; die beiden anderen Sektoren sind mit „9“ beschriftet.

- 2 BE a) Das Glücksrad wird viermal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahlen 2, 0, 1 und 9 in der angegebenen Reihenfolge erzielt werden.

Fünf gleich große Sektoren: $p_0 = 1/5$; $p_1 = 1/5$; $p_2 = 1/5$; $p_9 = 2/5$ (zwei Sektoren „9“)

Viermaliges Drehen: $P(„2-0-1-9“) = p_2 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot p_9 = 1/5 \cdot 1/5 \cdot 1/5 \cdot 2/5 = \frac{2}{5^4}$ [würde mir genügen]

Alternativ (mit Dezimalzahlen: $1/5 = 0,2$ und $2/5 = 0,4$):

$$P(„2-0-1-9“) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,4 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{8 \cdot 4}{10000} = \frac{32}{10000} = 0,0032 \quad [\text{würde mir genügen}]$$

- 3 BE b) Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen mindestens 11 beträgt.

„Summe mind. 11“ ist möglich mit „2-9“ oder mit „9-2“ oder mit „9-9“, die Wahrscheinlichkeiten dieser drei Ergebnisse müssen addiert werden (wegen „oder“):

$$\begin{aligned} P(„\text{Summe mind. 11}“) &= P(„2-9“) + P(„9-2“) + P(„9-9“) = 1/5 \cdot 2/5 + 2/5 \cdot 1/5 + 2/5 \cdot 2/5 = \\ &= 2/25 + 2/25 + 4/25 = 8/25 [= 32/100 = 0,32] \end{aligned}$$

Alternativ (mit Dezimalzahlen):

$$P(„\text{Summe mind. 11}“) = \dots = 0,2 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,4 = 0,08 + 0,08 + 0,16 = 0,32$$

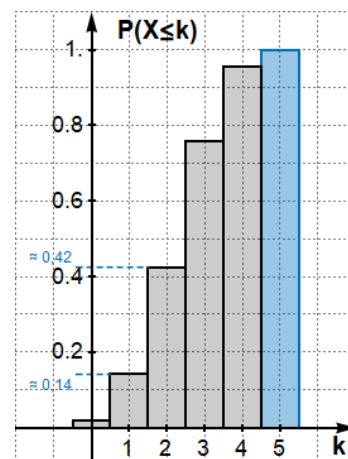
- 2 BE 2 Gegeben ist eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit dem Parameterwert $n = 5$. Dem Diagramm in Abbildung 1 kann man die Wahrscheinlichkeitswerte $P(X \leq k)$ mit $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ entnehmen.

Ergänzen Sie den zu $k = 5$ gehörenden Wahrscheinlichkeitswert im Diagramm. Ermitteln Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$.

Das Diagramm zeigt die jeweilige Summenwahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$. Die „Kettenlänge“ n ist 5. Deshalb hat die Summenwahrscheinlichkeit für $k = 5$ den Wert 1: $P_p^5(X \leq 5) = 1$

[Es gilt immer: $P_p^n(X \leq n) = 1$, d. h. die „letzte“ Säule im Diagramm der Summenwahrscheinlichkeiten hat immer die Höhe 1.]

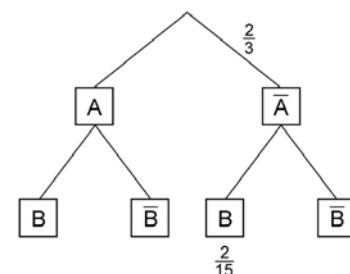
$$P(X = 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) \stackrel{\text{Ablesen!}}{\approx} 0,42 - 0,14 = 0,28$$



- 3 BE 3 Das Baumdiagramm in Abbildung 2 gehört zu einem Zufallsexperiment mit den stochastisch unabhängigen Ereignissen A und B. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B.

Wenn die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind, dann sind auch $\bar{A}$ und B (u. A und $\bar{B}$ u. $\bar{A}$ und $\bar{B}$) stoch. unabhängig:

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B) \rightarrow P(B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{2/15}{2/3} = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$



Für die zweite Ebene im Baumdiagramm gilt bei stoch. Unabhängigkeit:

Die Wahrscheinlichkeiten der Zweige, die jeweils zum selben Ereignis (in der zweiten Ebene) führen, haben denselben Wert, d. h. $P_A(B) = P_{\bar{A}}(B)$ [= $P(B)$].

Bei stochastischer Unabhängigkeit ist die Vierfeldertafel außerdem eine sog. Multiplikationstabelle:

$$\text{hier also: } P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B)$$

♥	A	$\bar{A}$	♥
B	1/15	2/15	1/5
$\bar{B}$	4/15	8/15	4/5
♥	1/3	2/3	1

Teil B (mit Hilfsmitteln)

- 1 Jeder sechste Besucher eines Volksfests trägt ein Lebkuchenherz um den Hals. Während der Dauer des Volksfests wird 25-mal ein Besucher zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der ausgewählten Besucher, die ein Lebkuchenherz tragen.

2 BE

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ausgewählten Besuchern höchstens ein Besucher ein Lebkuchenherz trägt.

X : Anzahl der Lebkuchenherz-TrägerInnen ; Trefferwahrsch.: $p = 1/6$

$$P(\text{„höchstens ein L♥-Träger“}) = P_{1/6}^{25}(X \leq 1) \stackrel{\text{TW S. 16}}{=} 0,06290$$

2 BE

- b) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\sum_{i=5}^8 B(25; \frac{1}{6}; i)$ berechnet werden kann.

$$P(E) = \sum_{i=5}^8 B(25; \frac{1}{6}; i) = P_{1/6}^{25}(5 \leq X \leq 8)$$

E : Von 25 BesucherInnen tragen mindestens 5 und höchstens 8 ein Lebkuchenherz.

4 BE

- c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert der Zufallsgröße X höchstens um eine Standardabweichung vom Erwartungswert der Zufallsgröße abweicht.

$$E(X) = n \cdot p = 25 \cdot 1/6 = 4 \frac{1}{6} \quad (\approx 4,17 \text{ besser: NICHT runden})$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{25 \cdot 1/6 \cdot 5/6} = 5/6 \cdot \sqrt{5} \quad (\approx 1,86 \text{ besser: NICHT runden})$$

X soll höchstens um eine Standardabweichung σ von $E(X)$ abweichen (nach oben und unten), d. h.:

$$X \leq E(X) + \sigma = 4 \frac{1}{6} + 5/6 \cdot \sqrt{5} = 6,03005... \rightarrow X \leq 6 \text{ und zugleich}$$

$$X \geq E(X) - \sigma = 4 \frac{1}{6} - 5/6 \cdot \sqrt{5} = 2,30327... \rightarrow X \geq 3$$

$$\text{Also: } P_{1/6}^{25}(3 \leq X \leq 6) = P_{1/6}^{25}(X \leq 6) - P_{1/6}^{25}(X \leq 2) \stackrel{\text{TW S. 16}}{=} 0,89077 - 0,18869 = 0,70208$$

5 BE

- 2 Bei einer Losbude wird damit geworben, dass jedes Los gewinnt. Die Lose und die zugehörigen Sachpreise können drei Kategorien zugeordnet werden, die mit „Donau“, „Main“ und „Lech“ bezeichnet werden. Im Lostopf befinden sich viermal so viele Lose der Kategorie „Main“ wie Lose der Kategorie „Donau“. Ein Los kostet 1 Euro. Die Inhaberin der Losbude bezahlt im Einkauf für einen Sachpreis in der Kategorie „Donau“ 8 Euro, in der Kategorie „Main“ 2 Euro und in der Kategorie „Lech“ 20 Cent. Ermitteln Sie, wie groß der Anteil der Lose der Kategorie „Donau“ sein muss, wenn die Inhaberin im Mittel einen Gewinn von 35 Cent pro Los erzielen will.

„im Mittel einen Gewinn von ...“ läuft auf den Erwartungswert einer Zufallsgröße hinaus.

Dazu benötigt man die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße (d. h. die Tabelle mit x und $P(X = x)$).

Zunächst legt man fest, um welche Zufallsgröße X es sich hier handelt: X : Gewinn für Inhaberin pro Los

Dann „baut“ man aus den Informationen im Aufgabentext die Tabelle „zusammen“:

X : Gewinn für Inhaberin pro Los ; Einnahme für die Inhaberin: 1 € pro Los

Preis-Kategorie:	„Donau“	„Main“	„Lech“
Kosten für Preis im Einkauf:	8 (€)	2 (€)	0,20 (€)
Gewinn für Inhaberin pro Los: x	-7	-1	0,80
Anteil der Lose: $P(X = x)$	a	$4a$	$1 - 5a$

Die letzte Zeile ist die am schwierigsten zu füllende:

Für den gesuchten Anteil der „Donau“-Lose legt man eine Variable fest (hier: a ; auch möglich: p ; nicht so gut: x).

Der Anteil der „Main“-Lose ist viermal so groß, also $4a$.

Die Anteile aller Los-Kategorien ergeben addiert den Wert 1,

sodass sich für de Anteil der „Lech“-Lose ergibt: $1 - a - 4a = 1 - 5a$

$$E(X) = (-7) \cdot a + (-1) \cdot 4a + 0,80 \cdot (1 - 5a) = -7a - 4a + 0,8 - 4a = 0,8 - 15a \stackrel{!}{=} 0,35 ; \quad | -0,35 | + 15a$$

$$0,45 = 15a ; \quad | : 15 \rightarrow a = 0,03 \quad [\text{„Donau“: } 3 \% ; \text{ „Main“: } 12 \% ; \text{ „Lech“: } 85 \%]$$

- 3 Die Inhaberin der Losbude beschäftigt einen Angestellten, der Besucher des Volksfests anspricht, um diese zum Kauf von Losen zu animieren. Sie ist mit der Erfolgsquote des Angestellten unzufrieden.

5 BE

- a) Die Inhaberin möchte dem Angestellten das Gehalt kürzen, wenn weniger als 15 % der angesprochenen Besucher Lose kaufen. Die Entscheidung über die Gehaltskürzung soll mithilfe eines Signifikanztests auf der Grundlage von 100 angesprochenen Besuchern getroffen werden. Dabei soll möglichst vermieden werden, dem Angestellten das Gehalt zu Unrecht zu kürzen. Geben Sie die entsprechende Nullhypothese an und ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel auf dem Signifikanzniveau von 10 %.

Es soll vermieden werden, „dem Angestellten das Gehalt zu Unrecht zu kürzen“.

Das heißt: Das Risiko, den Angestellten für einen „schlechten Werber“ („wenige Los-Käufer“) zu halten, obwohl der Anteil der Los-Käufer mindestens 15 % beträgt, soll gering gehalten werden.

Daraus ergibt sich die Nullhypothese: $H_0: p \geq 0,15$ („viele Los-Käufer“)

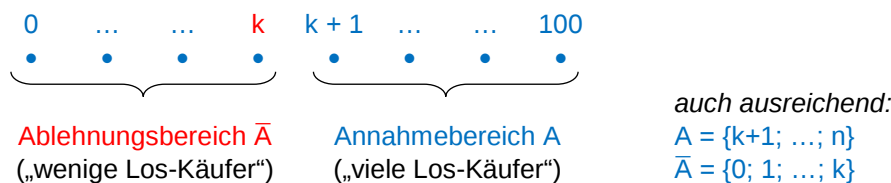
p : Anteil der Los-Käufer ; X : „Anzahl der Los-Käufer“ ; Stichprobenlänge: $n = 100$

Es soll nur mit einem Risiko von 10 % „das Gehalt zu unrecht“ gekürzt werden (H_0 wird abgelehnt), obwohl der Angestellte ein „guter Werber“ ist („viele Los-Käufer“, d. h. H_0 trifft zu).

Der Fehler 1. Art (H_0 trifft zu, wird aber fälschlich abgelehnt) soll also höchstens 10 % sein.

Aus dieser Forderung ergibt sich die Entscheidungsregel:

Die möglichen Werte für die Zufallsgröße X : „Anzahl der Los-Käufer“ werden aufgeteilt:



Aus der Forderung $P(\text{„Fehler 1. Art“}) \stackrel{!}{\leq} 10\%$ ergibt sich:

Fehler 1. Art: H_0 trifft zu, $\rightarrow p \geq 0,15$
wird (fälschlich) abgelehnt. $\rightarrow X \in \bar{A}$, d. h. $X \leq k$

Für den Angestellten ist der riskanteste Fall, dass der Los-Käufer-Anteil genau 15 % ist, denn bereits ab 15 % Los-Käufern soll sein Gehalt ungekürzt bleiben. Deshalb: $p = 0,15$.

Also:

$$P_{0,15}^{100}(X \in \bar{A}) \stackrel{!}{\leq} 10\%$$

$$P_{0,15}^{100}(X \leq k) \leq 0,1$$

Wir müssen nun im Tafelwerk bei der Binomialverteilung für $p = 0,15$ und $n = 100$ nachsehen, bis zu welchem k die Summenwahrscheinlichkeit (rechte Spalte) noch kleiner oder auch gleich 0,1 ist.

Tafelwerk (S. 13): $P_{0,15}^{100}(X \leq 10) = 0,09945$ ($\leq 0,1$ „passt“) und zum Vergleich:

$P_{0,15}^{100}(X \leq 11) = 0,16349$ ($> 0,1$ „zu groß“)

Also: $k = 10$, folglich ergibt sich nun als Entscheidungsregel:

$X \in A = \{11; 12; \dots; 100\} \rightarrow H_0$ wird beibehalten („Gehalt wird nicht gekürzt“)
 $X \in \bar{A} = \{0; 1; \dots; 10\} \rightarrow H_0$ wird abgelehnt („Gehalt wird gekürzt“)

2 BE

- b) Der Angestellte konnte bei der Durchführung des Tests zehn von 100 erwachsenen Besuchern dazu animieren, Lose zu kaufen. Er behauptet, dass er zumindest bei Personen mit Kind eine Erfolgsquote größer als 10 % habe. Unter den 100 angesprochenen Besuchern befanden sich 40 Personen mit Kind. Von den Personen ohne Kind zogen 54 kein Los. Überprüfen Sie, ob das Ergebnis der Stichprobe die Behauptung des Angestellten stützt.

Vierfeldertafel mit den absoluten Zahlen:

Erfolgsquote bei Personen mit Kind:

$\frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$ (nicht größer 10 %)

Das Ergebnis der Stichprobe stützt die Behauptung des Angestellten NICHT.

☀	mit Kind	ohne Kind	☀
Los gekauft	4	6	10
kein Los	36	54	90
☀	40	60	100