

Beispiel zur Einführung: „Stoff-Farbe-Fühlen-Wette“ (siehe auch: Buch S. 113 ff)

Eine Kandidatin in eine „Wetten-dass-Show“ behauptet, sie könne durch Fühlen herausfinden, welcher von 6 verschiedenen Stoffen „rot“ ist.

Diese (aus nat.-wiss. Sicht gewagte) Behauptung soll überprüft werden.

Dazu wird ein Test mit 10 Durchgängen mit je 6 Stoffen (davon einer „rot“) durchgeführt.

Wir glauben: Die Kandidatin rät bloß!

Dann ist ihre „Trefferquote“ bei jedem einzelnen Durchgang: $p = \frac{1}{6}$.

Wir testen also die Nullhypothese (heißt halt so): $H_0: p = \frac{1}{6}$ (Bedeutung: „Sie rät“)

Wenn die Nullhypothese zutrifft (d. h. „Sie rät“), wird die Kandidatin bei 10 Durchgängen beim Raten „zufällig“ einige Male den richtigen Stoff als „rot“ bestimmen.

Wir betrachten dazu die Zufallsgröße

X: „Anzahl richtig bestimmter Stoffe bei 10 Durchgängen“.

Die zu erwartende Anzahl richtig bestimmter Stoffe bei 10 Durchgängen ist

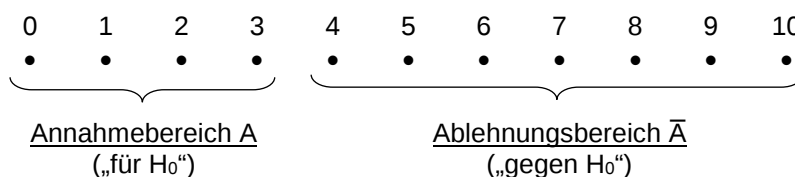
$$E(X) = n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{6} = 1,666... \approx 1,7.$$

Nun legen wir (heute noch beliebig, aber sinnvoll) eine Entscheidungsregel fest:

Wenn die Kandidatin bei 10 Durchgängen 0- bis 3-mal richtig liegt (also: nicht so oft richtig), wollen wir an unserer Nullhypothese („Sie rät“) festhalten.

Wenn die Kandidatin bei 10 Durchgängen 4- bis 10-mal richtig liegt (also: ziemlich oft richtig), müssen wir ihr wohl die Fähigkeit „Farben-Fühlen“ zusprechen.

Mögliche Werte für X: „Anzahl richtig bestimmter Stoffe bei 10 Durchgängen“:



$X \in A = \{0; 1; 2; 3\} \rightarrow H_0$ wird beibehalten.

$X \in \bar{A} = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\} \rightarrow H_0$ wird abgelehnt.

Wir wissen nicht, ob die zu testende Hypothese („Sie rät“) in Wirklichkeit zutrifft oder nicht; das Stichprobenergebnis X kann im Annahmebereich oder im Ablehnungsbereich liegen:

Vier mögliche Fälle:

	Stichprobenergebnis im Annahmebereich A (d. h. $X \leq 3$)	Stichprobenergebnis im Ablehnungsbereich $\bar{A}$ (d. h. $X \geq 4$)
In Wirklichkeit: H_0 trifft zu, d. h. $p = \frac{1}{6}$ (Kandidatin rät)	H_0 wird beibehalten (Richtige Entscheidung)	H_0 wird abgelehnt (Falsche Entscheidung, denn H_0 trifft ja zu: sog. Fehler 1. Art)
In Wirklichkeit: H_0 trifft <u>nicht</u> zu, d. h. $p > \frac{1}{6}$ (Kandidatin kann „Farbe-Fühlen“)	H_0 wird beibehalten (Falsche Entscheidung, denn H_0 trifft ja <u>nicht</u> zu: sog. Fehler 2. Art)	H_0 wird abgelehnt (Richtige Entscheidung)

Allgemein: [Siehe auch: Merkhilfe innen-unten-rechts]

- Fehler 1. Art:** H_0 trifft (in Wirklichkeit) zu,
wird aber (aufgrund des Stichprobenergebnisses) fälschlich abgelehnt.
- Fehler 2. Art:** H_0 trifft (in Wirklichkeit) nicht zu,
wird aber (aufgrund des Stichprobenergebnisses) fälschlich beibehalten.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art?

Fehler 1. Art: H_0 trifft zu, $\rightarrow p = 1/6$
wird (fälschlich) abgelehnt. $\rightarrow X \in \bar{A}$, d. h. $X \geq 4$

Wahrscheinlichkeit dafür:

$$P_{1/6}^{10}(X \in \bar{A}) = P_{1/6}^{10}(X \geq 4) = 1 - P_{1/6}^{10}(X \leq 3) \stackrel{[\text{Tafelwerk S. 15}]}{=} 1 - 0,93027 = 0,06973 \approx 7,0 \%$$

Das heißt: Bei der von uns festgelegten Entscheidungsregel wird der Kandidatin mit einer Wahrsch. von ca. 7,0 % die Fähigkeit „Farbe-Fühlen“ zugesprochen (H_0 wird abgelehnt), obwohl sie in Wirklichkeit nur rät (H_0 trifft zu).

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art?

Fehler 2. Art: H_0 trifft nicht zu, $\rightarrow p = ?$
wird (fälschlich) beibehalten. $\rightarrow X \in A$, d. h. $X \leq 3$

Die Wahrscheinlichkeit lässt sich nicht berechnen, da wir die tatsächliche „Trefferwahrscheinlichkeit“ p der Kandidatin nicht kennen.

Wir nehmen an, dass die Kandidatin zumindest mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von 50 % den roten Stoff richtig erfühlen kann, d. h.: $p = 1/2$.

Unter dieser Annahme ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art:

$$P_{1/2}^{10}(X \in A) = P_{1/2}^{10}(X \leq 3) \stackrel{[\text{Tafelwerk S. 26}]}{=} 0,17188 \approx 17,2 \%$$

Das heißt: Bei der von uns festgelegten Entscheidungsregel wird der Kandidatin mit einer W. von ca. 17,2 % die Fähigkeit „Farbe-Fühlen“ abgesprochen (H_0 wird beibehalten), obwohl sie in Wirklichkeit eine Trefferquote von 50 % hat (H_0 trifft nicht zu).

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art hängt von der tatsächlichen „Trefferwahrscheinlichkeit“ p ab. Wie groß diese Wahrscheinlichkeit bei der von uns festgelegten Entscheidungsregel für verschiedene tatsächliche „Trefferwahrscheinlichkeiten“ p ist, ist im Buch auf S. 115 (oben) dargestellt.

Dies soll als Einführung in das Thema „Signifikanztest“ erst einmal genügen.

Wirklich ideal passend bis zu unserem heutigen Wissensstand ist die Aufgabe S. 118/2 „Telepathie“.

Bitte unbedingt selbstständig zu bearbeiten versuchen!

Die Lösung wird spätestens am Mo., 30.03., auf www.mathe12.mathebauer.de veröffentlicht werden.

Ergänzend zur Bearbeitung der Aufgabe S. 118/2 „Telepathie“ bitte im Buch lesen:

S. 115 (unten): „Einfluss der Entscheidungsregel auf die Fehler 1. und 2. Art“ sowie

S. 116 (oben): „Einfluss der Stichprobenlänge n auf die Fehler 1. und 2. Art“

Die weiteren Aspekte zum Thema „Signifikanztest“ werden wir uns nächste Woche erarbeiten.